Apuntes de Ecuaciones Diferenciales

José A. Cañizo

22 de mayo de 2017

Índice

Estos son apuntes de ecuaciones diferenciales utilizados para el grupo de tarde del curso “Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico” del grado en Telecomunicaciones, Universidad de Granada, febrero 2017 – junio 2017. Muchos de los ejercicios están tomados de ejercicios de clase de Aureliano Robles. Estos apuntes son un borrador y pueden contener fallos; están puestos sólo como un ayuda para seguir la asignatura.

Últimos cambios: 22 de mayo de 2017.

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1.1. Idea general

Una ecuación diferencial es una relación entre las derivadas de una función (de una o varias variables) y la propia función. El problema fundamental de una ecuación diferencial es encontrar la función o funciones que cumplen dicha relación, a las que llamamos *soluciones*. Los posibles tipos de ecuaciones diferenciales son extremadamente variados y aparecen frecuentemente en muchos campos de la ciencia, en particular en física y en ingeniería. La idea es muy natural, ya que en muchos problemas podemos encontrar una relación entre una cantidad y sus derivadas, y nos gustaría poder deducir cuál debe ser la cantidad.

Uno de los tipos más básicos de ecuación diferencial es la *ecuación diferencial ordinaria* (EDO)

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \tag{1}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es la *variable independiente*, $y = y(t) \in \mathbb{R}$ es la *función incógnita* (que sólo depende de una variable real t) y f es una función dada de $n+1$ variables reales. Normalmente el objetivo es encontrar una función $y = y(t)$, definida para t en un cierto intervalo, que cumpla (1) para todo t en dicho intervalo; dicha y se llama *solución* de (1). La forma (1), con la derivada de orden mayor despejada, se denomina a veces *forma normal* de la ecuación diferencial ordinaria. Una forma más general de EDO es

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \tag{2}$$

donde $y^{(n)}$ no está despejada en la ecuación y f es una función de $n+2$ variables. Nosotros trabajaremos siempre con la forma (1); si encontramos una ecuación de la forma (2) despejaremos siempre la derivada de orden mayor para obtener la forma (1). Es corriente omitir la variable independiente t en las expresiones (2) o (1) para acortar la escritura, de forma que escribimos

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

de forma equivalente a (1).

Otro tipo de ecuación diferencial es una *ecuación en derivadas parciales*:

$$f(x, Dy(x), \dots, D^n y(x)) = 0, \tag{3}$$

donde $y = y(x) \in \mathbb{R}$ es una función de $x \in \mathbb{R}^d$ y $D^k y$ denota el conjunto de derivadas parciales de orden k de la función y. La diferencia fundamental con (2) es que aquí la función y depende de más de una variable ($x \in \mathbb{R}^d$ en lugar de $t \in \mathbb{R}$), de forma que la EDO (2) puede verse como el caso particular de la EDP (3) cuando y depende de una sola variable. La teoría para estos dos tipos de ecuaciones diferenciales es muy distinta, por lo que su estudio suele hacerse por separado.

El orden de la derivada más alta que aparece en las expresiones (1) o (3) se llama el *orden* de la EDO (o EDP).

Más adelante veremos una definición más precisa del concepto de ecuación diferencial, pero empecemos por ver algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1 (Funciones con derivada 0)**.** *La EDO más simple es posiblemente*

$$y' = 0. \tag{4}$$

Esta EDO está en forma normal, y su orden es 1. En este caso la función f de (1) *es*

$$f(t, y) = 0,$$

y está claro que dada cualquier constante real C la función $y(t) = C$ para $t \in \mathbb{R}$ es solución de (4)*. Todas las soluciones tienen que ser constantes, porque sabemos que una función con derivada cero en un intervalo tiene que ser constante en dicho intervalo.*

Ejemplo 1.2 (Primitivas)**.** *Otro ejemplo sencillo de EDO es*

$$y' = h(t), \tag{5}$$

donde suponemos que h es una función continua definida en un intervalo abierto I. Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo que cualquier función primitiva de h es una solución: para cualquier $t_0 \in I$ la función

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I$$

es una solución. Todas estas soluciones se diferencian en una constante, y además sabemos de nuevo por el Teorema Fundamental del Cálculo que éstas son las únicas soluciones posibles.

A veces la solución puede escribirse explícitamente si sabemos calcular una primitiva de h; a veces esto no es posible en términos de funciones elementales, como por ejemplo en el caso

$$h(t) = e^{-t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ya que la primitiva de esta función no tiene una expresión en términos de funciones sencillas (dicha primitiva, para $x_0 = 0$, tiene un nombre: se llama la función error[1] *y suele denotarse por* $\mathrm{erf}(t)$*)*

Este tipo de EDO es un ejemplo trivial, en el sentido de que su solución se reduce al cálculo de primitivas.

Ejemplo 1.3. *Los ejemplos anteriores son muy sencillos porque la ecuación no involucra el valor de $y(t)$. El ejemplo más fácil en que no es así es*

$$y' = y. \tag{6}$$

Es decir: buscamos una función $y = y(t)$ cuya derivada sea igual a ella misma. Se trata de una ecuación de primer orden, que corresponde a tomar

$$f(t, y) = y$$

en (1). Sabemos que una solución posible es

$$y(t) = e^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

¿Hay otras soluciones? Sí: la función $y(t) = Ce^t$ es una solución, para cualquier $C \in \mathbb{R}$. Éstas son las únicas soluciones posibles, pero la demostración de esto no es tan evidente como antes. (¿Se te ocurre cómo hacerla?)

Ejemplo 1.4. *Como en el Ejemplo 1.1, consideramos ahora*

$$y''(t) = 0.$$

Esta ecuación es de segundo orden, y corresponde a

$$f(t, y, y') = 0$$

en (1). Se puede resolver de forma muy parecida: como $(y')' = 0$, el Ejemplo 1.1 nos dice que $y'(t) = C_1$ para cierta constante $C_1 \in \mathbb{R}$. Por tanto, $y(t) = C_1 t + C_2$ para ciertas $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. No es difícil demostrar que estas son las únicas soluciones; notamos que ahora la familia de soluciones depende de dos *parámetros.*

Ejemplo 1.5. *De forma parecida al Ejemplo 1.2 podemos plantearnos la ecuación*

$$y''(t) = h(t)$$

para h una función dada. Esta ecuación se puede resolver de forma muy parecida: si H es cualquier segunda primitiva *de h (es decir, una función que cumple $H'' = h$, que se puede obtener integrando dos veces) entonces*

$$y(t) = H(t) + C_1 t + C_2.$$

De nuevo, éstas son las únicas soluciones, y de nuevo la familia depende de dos parámetros.

[1] Para ser más precisos, la definición usual de la función error es $\mathrm{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s/2}\,\mathrm{d}s$.

Ejemplo 1.6. *Una ecuación de segundo orden menos trivial es*

$$y'' = y. \tag{7}$$

Sus soluciones son

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

pero es más difícil ver que efectivamente son las únicas.

Ejemplo 1.7. *Si cambiamos el signo de la ecuación anterior y consideramos*

$$y'' = -y$$

el comportamiento de las soluciones cambia completamente:

$$y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

En general, para la ecuación

$$y'' = -ky$$

con $k > 0$, las soluciones son de la forma

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{k}t) + C_2 \cos(\sqrt{k}t).$$

Por supuesto, hay una conexión muy directa entre las soluciones de este ejemplo y las del anterior: los dos casos pueden escribirse como exponenciales, ya que

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \qquad \sin t = \frac{i}{2}(e^{-it} - e^{it}).$$

Las soluciones de (7) pueden escribirse también como

$$y(t) = C_1 \cosh t + C_2 \sinh t,$$

donde el coseno y seno hiperbólicos son

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \qquad \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Ejemplo 1.8 (La ley de Newton)**.** *Llamemos $y(t)$ a la posición de un objeto de masa 1 en tiempo t. La segunda ley de Newton dice que su aceleración viene dada por la fuerza que se ejerce sobre él; como la aceleración es la segunda derivada de y, tenemos*

$$y'' = F,$$

donde F es la fuerza. Si F es conocida esto nos da una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Por ejemplo, la fuerza que ejerce un muelle depende linearmente (aproximadamente) de la distancia a su posición de reposo. La ecuación en este caso es

$$y'' = -ky,$$

donde $k > 0$ es la constante de restitución *del muelle. Sabemos por el ejemplo anterior que sus soluciones son sumas de senos y cosenos: un objeto sujeto a un muelle* oscila *con una frecuencia que depende del tipo de muelle a través de la constante k.*

Otro ejemplo: para un objeto que está cerca de la Tierra la aceleración de la gravedad es constante. Si y representa la altura del objeto la ecuación correspondiente sería

$$y'' = -g,$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (observa que la aceleración no depende de su masa*). Si el objeto no está tan cerca de la Tierra la aceleración depende de la distancia a la Tierra: si $y(t)$ denota la distancia al centro de la Tierra en el momento t la ecuación sería*

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}, \tag{8}$$

donde R es el radio de la Tierra. La ecuación que debemos resolver si queremos calcular la órbita de un objeto (por ejemplo de un satélite) es en realidad un sistema de ecuaciones, ya que si dibujamos la órbita en el plano necesitamos conocer sus coordenadas x, y. Si situamos el origen de coordenadas en el centro de la Tierra y $(x(t), y(t))$ representa la posición de un satélite en tiempo t, el sistema de ecuaciones que cumple es

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\frac{gR^2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ y'' &= -\frac{gR^2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

o, escrito de una forma más sencilla, llamando $z(t) := (x(t), y(t))$:

$$z' = -\frac{gR^2z}{|z|^3}.$$

Un satélite moviéndose en una órbita circular de radio r a cierta velocidad angular constante ω describe la curva

$$(x(t), y(t)) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t)).$$

Esta función es solución de (9) sólo para un valor concreto de ω (y para su opuesto, claro: un satélite puede orbitar en cualquier dirección). ¿Puedes calcularlo? La velocidad angular de la Tierra es aproximadamente una vuelta por día (sorprendentemente, no es exactamente *una vuelta por día como podrías pensar, ¿sabes por qué?). ¿A qué altura debe estar un satélite para tener la misma velocidad angular que la Tierra? Estos satélites se llaman* geoestacionarios *porque se mantienen encima de un punto fijo de la superficie de la Tierra.*

1.2. Problema de valores iniciales

En los ejemplos anteriores hemos visto que una ecuación de primer orden tiene en general una única solución cuya gráfica pasa un punto dado del plano, y el conjunto de soluciones depende de un parámetro. En los ejemplos de ecuaciones de segundo orden hemos encontrado una familia de soluciones que depende de *dos* parámetros. Este comportamiento es así en general (con excepciones), y por esto a una EDO se le suele añadir una *condición inicial.* Un *problema de valores iniciales* o PVI (también llamado *problema de Cauchy*) es una EDO con n condiciones iniciales añadidas, donde n es el grado de la EDO:

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ &y(t_0) = y_0, \\ &y'(t_0) = y_0^1, \\ &\qquad \vdots \\ &y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aquí, t_0, y_0, $y_0^1, \dots, y_0^{n-1}$ son números dados. Hemos añadido como condición el valor que deben tomar y y sus $n-1$ primeras derivadas en el punto t_0. Por supuesto, una solución del PVI (10) es una solución de la EDO que además cumple las condiciones iniciales.

En el caso más sencillo en que la EDO es de orden 1, el PVI (10) se escribe como

$$\left.\begin{aligned} &y' = f(t, y) \\ &y(t_0) = y_0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ya que sólo hay que especificar una condición inicial: el valor de $y(t_0)$.

La utilidad de escribir el problema (10) es que dar una condición inicial es natural en muchos problemas, y que en la mayoría de los casos (10) tiene una única solución (en un sentido que precisaremos después). Por ejemplo, en el caso de ecuaciones de segundo orden obtenidas de la ley de Newton (ver Ejemplo 1.8) las condiciones iniciales especifican la posición y la velocidad del objeto en un momento dado.

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Considera la ecuación $x' = x^2 + t^2 + 1$. Suponiendo que admite solución, justifica la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. La solución que vale 2 en el instante $t = 3$ satisface que $x'(3) = 14$.
2. La solución que vale 0 en el instante $t = 3$ satisface que $x'(3) = 10$.
3. Todas las soluciones son estrictamente crecientes.
4. La solución que pasa por el punto $(0, 0)$ tiene un punto de inflexión en dicho punto.

Ejercicio 1.2. Para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, determina su dominio natural de definición y comprueba si las funciones propuestas son solución en algún intervalo. Si es así, ¿cuál es el intervalo maximal donde son solución?

1. $x' = \sqrt{t^2 + 1 - x^2}$; $x(t) = t$
2. $x' = \sqrt{t^2 + 1 - x^2}$; $x(t) = -t$
3. $x' = t + \sqrt{t^2 + 4 - x^2}$; $x(t) = 2$.

Ejercicio 1.3. Comprueba si las leyes propuestas satisfacen la ecuación diferencial $x' = \frac{1}{x}$. En caso afirmativo, determina el intervalo maximal de definición de la ley como solución.

a) $x(t) = \sqrt{2t+5}\,.$ *b*) $x(t) = \sqrt{2t-5}\,.$

c) $x(t) = \sqrt{5-2t}\,.$ *d*) $x(t) = \sqrt{-5-2t}\,.$

e) $x(t) = \sqrt{2t}\,.$ *f*) $x(t) = \sqrt{-2t}\,.$

Ejercicio 1.4. Considera la ecuación diferencial

$$x' = x\,(1-x)\,. \tag{12}$$

1. Justifica que las únicas soluciones constantes posibles de (12) son

$$i)\ x(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}; \qquad ii)\ x(t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. Comprueba que, si $k \in \mathbb{R}$, entonces las funciones

$$x(t) = \frac{e^t}{k+e^t},\ \forall t \in I_k, \tag{13}$$

donde I_k es un intervalo abierto que depende de k, satisfacen la ecuación (12). Determina, en cada caso, los intervalos abiertos maximales I_k correspondientes.

En los siguientes apartados consideraremos sólo las soluciones que están definidas en $t = 0$.

1. Comprueba que, si $k \in]0, +\infty[$, entonces las funciones de la familia (13) son positivas, estrictamente crecientes y tienen un único cambio de convexidad. ¿Puedes determinar el punto de inflexión para cada una de estas funciones?
2. Comprueba que, si $k \in]-1, 0[$, entonces las funciones de la familia (13) son positivas, estrictamente decrecientes y no tienen cambios de convexidad.
3. Comprueba que, si $k \in]-\infty, -1[$, entonces las funciones de la familia (13) son negativas, estrictamente decrecientes y no tienen cambios de convexidad.
4. Por cierto, ¿qué pasa si $k = 0$? ¿y si $k = -1$?

Ejercicio 1.5. Indica la(s) opción(es) correcta(s) en cada una de las siguientes afirmaciones.

1. Un posible dominio de la ecuación $t^2x' = x$ es...

   a) $D = \mathbb{R}^2$.

   b) $D = \{(t,x) \mid t \leq 0\}$.

   c) $D = \{(t,x) \mid t \geq 0\}$.

   d) $D = \{(t,x) \mid t < 0\}$.

2. Las soluciones positivas de la ecuación $x' = (xt)^5$ son...

   a) estrictamente crecientes en su dominio maximal.

   b) estrictamente decrecientes en su dominio maximal.

   c) convexas en su dominio maximal.

   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

3. La solución del problema de Cauchy (o problema de valores iniciales)

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen}(x), \\ x(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases}$$

   es...

   a) $x(t) = \cos(t), \quad \forall t > 0.$

   b) $x(t) = 0, \quad \forall t > 0.$

   c) El problema dado no tiene solución.

   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Sea la ecuación diferencial $(\ln(t^2+1))\, x'(t) + 3x(t) = 3.$

   a) La función $x(t) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}$, es la solución maximal que satisface la condición $x(1) = 1$.

   b) La función $x(t) = 1, \ \forall t > 0$, es la solución maximal que satisface la condición $x(1) = 1$.

   c) La función $x(t) = 1, \ \forall t < 4$, es la solución maximal que satisface la condición $x(1) = 1$.

   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. La función $x(t) = t^a, \ \forall t > 0$, es solución de la ecuación

$$t^4 x^{(iv)} + 2t^3 x''' - 6t^2 x'' + 2tx' + 18x = 0$$

   si...

   a) $a = 3$.

   b) $a = 5$.

   c) $a = 7$.

   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 1.6. Si $y = y(t)$ representa la altura de un objeto sobre el que actúa la gravedad de la Tierra, la ecuación que cumple y es

$$y'' = -g,$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (una constante, $\approx 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$).

1. Encuentra todas las soluciones de esta ecuación.

2. Si un objeto se lanza desde el suelo hacia arriba a una velocidad inicial de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, ¿cuál es la solución que describe su altura en función del tiempo? ¿Cuánto tarda en alcanzar su altura máxima?

Ejercicio 1.7. Hay sustancias que decaen espontáneamente en otras (por ejemplo, en procesos radiactivos como el decaimiento del uranio-238). En muchos casos la masa $y(t)$ de la primera sustancia en cierto momento sigue la ecuación diferencial

$$y' = -\lambda y, \tag{14}$$

para cierto parámetro positivo λ. La *vida media*, denotada t_2, de un compuesto es el tiempo necesario para que su masa decaiga a la mitad de la original. Si la cantidad $y = y(t)$ de un compuesto sigue la ley (20), calcula su vida media en función de λ.

Ejercicio 1.8. La vida media del uranio-238 es $4{,}468 \times 10^9$ años. Supongamos que tenemos una barra de uranio-238 puro de 1kg. ¿Cuántos átomos de uranio-238 han decaído después de 1 día? ¿Cuál es la cantidad total de energía que ha emitido en un día? (Teniendo en cuenta únicamente la energía emitida cuando decae el uranio-238 en Torio-234, no cuando decaen sus productos. Para responder esta última pregunta tienes que buscar información adicional.)

Ejercicio 1.9. El Carbono-14 es un isótopo del carbono que decae espontáneamente en nitrógeno con una vida media de 5730 años. Se sabe que un ser vivo contiene Carbono-14 y Carbono-12 (que es estable), en una proporción aproximada de 1,5 partes de Carbono-14 por 10^{12} partes de Carbono-12 (aproximadamente la misma proporción que la atmósfera), y esta proporción empieza a cambiar a partir de su muerte (debido a que ya no intercambia CO_2 con la atmósfera). Se encuentran unos restos arqueológicos que contienen 1 parte de Carbono-14 por cada 10^{12} de Carbono-12. ¿Cuál es la edad estimada de los restos?

Ejercicio 1.10. Una antena parabólica tiene la propiedad de que los rayos que inciden paralelamente en ella se reflejan y se concentran en un mismo punto (ver imagen). Sabiendo que el ángulo de reflexión sobre una superficie es el mismo que el ángulo de incidencia, deduce la ecuación diferencial que debe cumplir la gráfica de (una sección de) la antena y comprueba que $y = x^2$ es una solución.

2. Resultados sobre existencia y unicidad de soluciones

Las EDOs del tipo (1) tienen en general solución, y una vez especificadas las condiciones iniciales el PVI (10) tiene en general una única solución. Para enunciar un resultado de este tipo necesitamos dar una definición más precisa del concepto de *solución* de una EDO.

Definición 2.1 (Solución de una EDO)**.** Sean $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $y : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que y es una *solución de la EDO* (1) cuando

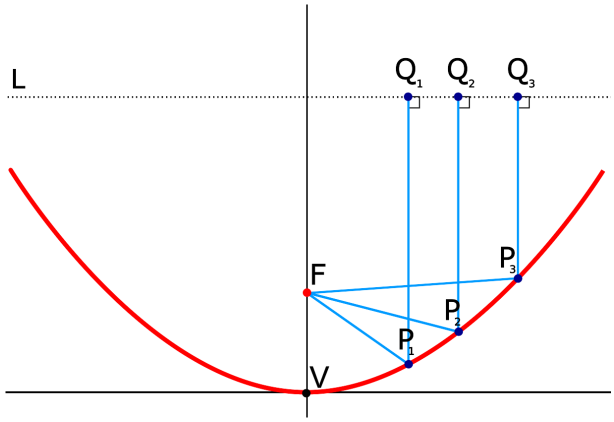

Figura 1: Esquema de una antena parabólica. Imagen de Wikimedia Commons (dominio público)

1. $y \in \mathscr{C}^n(I)$,
2. para todo $t \in I$ ocurre que $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{n-1}(t)) \in D$,
3. la función y satisface (1) para todo $t \in I$.

Sea $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in D$. Decimos que y es *solución del PVI* (10) cuando es solución de la EDO (1) con $t_0 \in I$, y además y cumple las condiciones iniciales especificadas en (10).

Observación 2.2. Los dos primeros puntos de la definición anterior sirven para asegurarse de que el tercer punto tiene sentido: podemos derivar y las veces que necesitamos, y podemos evaluar f en el punto que aparece en la ecuación.

Observación 2.3. El hecho de pedir y de clase $\mathscr{C}^n$ (en lugar de simplemente pedir que sea derivable n veces en cada punto), o exigir que D sea abierto, son condiciones técnicas que sirven para asegurarse de que los teoremas que vamos a dar a continuación son ciertos. Nada nos impide definir una solución con condiciones un poco menos exigentes, pero entonces estaríamos incluyendo casos raros que se escapan del comportamiento "corriente" de las EDOs.

Observación 2.4. Es importante notar que ningún momento hemos dado una definición matemáticamente rigurosa de "ecuación diferencial ordinaria", sino sólo de lo que es *una solución de una ecuación diferencial ordinaria* (la Definición 2.1 sí intenta ser completamente rigurosa). Las soluciones son los objetos que nos interesan, y prácticamente todos los resultados importantes se refieren exclusivamente a este concepto. Lo que es más importante, cuando se estudian ecuaciones en derivadas parciales el concepto de ecuación es más difuso ya que una misma ecuación puede tener asociados varios conceptos distintos de solución.

Es importante destacar que la definición rigurosa que hemos dado de "solución" implica que la función f está especificada de antemano, junto con su dominio D. Cuando uno encuentra una ecuación diferencial en cualquier aplicación normalmente tiene sólo una expresión de la ecuación. El dominio es algo que tenemos que incluir nosotros como parte de la descripción del modelo. Salvo que haya algo en contra, normalmente lo que hacemos cuando el dominio D no está especificado es usar el dominio "natural" de la función que aparezca en la ecuación.

Para dar nuestro resultado principal tenemos también que definir el concepto de *solución maximal* de una ecuación diferencial:

Definición 2.5 (Extensión de una función)**.** Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ dos subconjuntos, $y : I \to \mathbb{R}$, $z : J \to \mathbb{R}$ dos funciones. Decimos que z *es una extensión* de y (o que z *extiende a* y) cuando $I \subseteq J$ y ocurre que $y(t) = z(t)$ para todo $t \in I$. Decimos que la extensión es *estricta* cuando además $I \neq J$ (es decir, cuando J es estrictamente mayor que I).

Definición 2.6. Supongamos las condiciones de la Definición 2.1. Decimos que y es una *solución maximal* de la EDO (1) si es una solución, y además no existe ninguna otra solución que la extienda estrictamente.

Uno de los resultados más importantes sobre existencia y unicidad de EDOs es el siguiente.

Teorema 2.7. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $y : I \to \mathbb{R}$ una función, $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in D$.*

1. *Si f es continua en D entonces el PVI (10) tiene* al menos una *solución.*
2. *Si además las derivadas parciales de f con respecto a las últimas n variables son continuas en D, entonces el PVI (10) tiene* una única *solución maximal.*

No vamos a estudiar la demostración de este resultado, pero se puede encontrar en la mayoría de los libros sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 2.8. *Los ejemplos 1.1–1.7 cumplen todos las condiciones del Teorema 2.7. El ejemplo 1.8, donde planteábamos ecuaciones basadas en las leyes de Newton, lo cumple también, aunque hay que tener cuidado con el dominio natural de la función f que define la ecuación. Por ejemplo, el miembro derecho de la ecuación (8) no tiene sentido cuando $y = 0$, de forma que hay que excluir esos puntos del dominio D. Esto quiere decir, por ejemplo, que un problema de valores iniciales para la ecuación (8) tiene solución maximal única siempre que $y_0 \neq 0$.*

Ejemplo 2.9. *Hay problemas de valores iniciales que tienen más de una solución. El ejemplo clásico es la ecuación*

$$y' = \sqrt{|y|}. \tag{15}$$

En este caso la función f que define la ecuación es

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(t, y) = \sqrt{|y|} \quad \text{para } (t, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definida en el dominio $D = \mathbb{R}^2$. Puedes comprobar que f cumple el punto 1 del Teorema 2.7 pero no el punto 2, de forma que sabemos que dado $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe al menos una solución de (15) que cumple $y(t_0) = y_0$, pero el teorema no nos dice nada sobre si hay una sola o no. La respuesta en este caso es que hay muchas soluciones. Su expresión se da en el Ejemplo 4.6: si $C_1 \leq C_2$ son constantes reales entonces la función

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - C_1)^2 & \text{cuando } t \leq C_1, \\ 0 & \text{cuando } C_1 < t \leq C_2, \\ \frac{1}{4}(t - C_2)^2 & \text{cuando } t > C_2. \end{cases} \tag{16}$$

es solución de (15).

Ejercicio 2.1. 1. Demuestra que la función (16) es solución de (15).

2. Dados $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, demuestra que hay infinitas soluciones maximales de (15) que cumplen $y(t_0) = y_0$.

Ejercicio 2.2. Este ejercicio es una muestra de que es importante fijar de antemano el dominio en el que estamos trabajando si queremos demostrar con rigor resultados sobre una ecuación ordinaria. Consideramos la función $f\colon \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t, y) = \sqrt{y} \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},\ y > 0$$

y consideramos la ecuación

$$y' = f(t, y). \tag{17}$$

(Es decir: la ecuación $y' = \sqrt{y}$, en el dominio $D = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.) Demuestra que para cualquier $(t_0, y_0) \in D$ esta ecuación tiene una solución maximal única $y = y(t)$ que cumple $y(t_0) = y_0$.

3. Demostración del resultado de existencia y unicidad

Damos un esquema de la demostración para ecuaciones de primer orden. la demostración general puede obtenerse de forma parecida reduciéndola a un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden.

3.1. Existencia y unicidad locales

Uno de los puntos centrales del resultado es demostrar que siempre hay una solución *local* del problema de valores iniciales, esto es, al menos una solución definida en un intervalo pequeño alrededor de t_0.

Definición 3.1 (Unicidad local de la solución)**.** Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función, $(t_0, y_0) \in D$. Decimos que una solución $y : I \to \mathbb{R}$ del PVI (11) definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ es *localmente única* cuando cualquier otra solución $z : J \to \mathbb{R}$ del mismo PVI, definida en un intervalo abierto $J \subseteq \mathbb{R}$, cumple que existe un intervalo abierto $\tilde{I} \subseteq I \cap J$ tal que

$$z(t) = y(t) \qquad \text{para todo } t \in \tilde{I}.$$

Proposición 3.2 (Existencia y unicidad local)**.** *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua y $(t_0, y_0) \in D$. Entonces existe una solución del PVI (11).*

Si suponemos además que $\partial_y f \in \mathscr{C}^1(D)$ entonces dicha solución es localmente única.

En el resto de esta sección demostramos este resultado. Dividimos la demostración en varios pasos.

Definición de una sucesión de soluciones aproximadas Tomamos $r > 0$. Como D es abierto, para r suficientemente pequeño sabemos que $K := [t_0 - r, t_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subseteq D$; y como f es continua en D, sabemos que está acotada en K y definimos

$$m := \sup_{(t,y)\in K} |f(t,y)|.$$

Ahora tomamos $h := \text{mín}\{r/(2m), r\}$. Consideramos la siguiente sucesión de funciones definida recursivamente para $n \geq 0$: empezamos con

$$y^0(t) = y_0, \qquad t \in (t_0 - h, t_0 + h),$$

y suponiendo que $y^{(n-1)}$ está definida en $(t_0 - h, t_0 + h)$ definimos $y^{(n)}$ como la única función en $(t_0 - h, t_0 + h)$ que cumple

$$\left.\begin{aligned} &(y^n)'(t) = f(t, y^{n-1}(t)), \qquad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \\ &y^n(t_0) = y_0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Demostramos lo siguiente por inducción:

Cada función y^n está bien definida, es continua y su gráfica está dentro de K. (19)

La función y^0 está bien definida y es obviamente continua, y su gráfica es $(t_0 - h, t_0 + h) \times y_0 \subseteq K$ (ya que $h \leq r$).

Como la gráfica de y^n está dentro de K podemos considerar $f(t, y^n(t))$ (el punto $(t, y^n(t))$ está dentro del dominio de f). Como y^n es continua, la función $t \mapsto f(t, y^n(t))$ es continua por ser composición de funciones continuas. Por tanto la ecuación (18) tiene solución porque es como la del Ejemplo 1.2: su solución puede escribirse explícitamente como

$$y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^n(s))\,\mathrm{d}s, \tag{20}$$

lo cual tiene sentido como integral de Riemann o Lebesgue, ya que estamos integrando una función continua. Nuestra definición de h está hecha para asegurarnos de que la gráfica de y^{n+1} cae dentro de K, ya que para $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ tenemos

$$|y^{n+1}(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y^n(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y^n(s))|\,\mathrm{d}s \leq |t - t_0| m \leq hm \leq \frac{r}{2}.$$

Hemos demostrado entonces la afirmación (19).

Paso al límite La sucesión de funciones $\{y^n\}_{n\geq 0}$ en el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ es uniformemente continua, y uniformemente acotada. El Teorema de Ascoli-Arzelá nos dice que existe una subsucesión de $\{y^n\}$ (a la que llamamos también $\{y^n\}$ para simplificar la notación) que converge uniformemente a una cierta función y en $(t_0 - h, t_0 + h)$. Dado que la gráfica de y^n está contenida en K, lo mismo ocurre con la gráfica de y. Como la convergencia es uniforme y f es continua en K,

$$f(t, y^n(t)) \to f(t, y(t)) \qquad \text{uniformemente en } (t_0 - h, t_0 + h),$$

así que podemos pasar al límite en (20) y obtener que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$

Esto implica que y es de hecho una función en $\mathscr{C}^1((t_0 - h, t_0 + h))$ y es solución del PVI (11).

Unicidad local de la solución Supongamos ahora además que $\partial_y f$ es continua en D. Sean x, y son dos soluciones del PVI (11), definidas en los intervalos I, J, respectivamente. Definimos r, K y m como en el primer paso, y tomamos h lo suficientemente pequeño como para que $h \leq \min\{r/(2m), r\}$ y además $(x_0 - h, x_0 + h)$ esté contenido en $I \cap J$. De esta forma nos aseguramos de que tanto x como y están definidas en $(t_0 - h, t_0 + h)$, y de que sus gráficas están contenidas en K. Definimos

$$L := \sup_{(t,y)\in K} |\partial_y f(t, y)|.$$

Para $t \in I$, tenemos que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s,$$
$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Por tanto,

$$|y(t) - x(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, x(s))|\,\mathrm{d}s \leq L \int_{t_0}^{t} |y(s) - x(s)|\,\mathrm{d}s,$$

donde hemos usado el Teorema del Valor Medio. Finalmente, como $y(t_0) = x(t_0)$, el Lema de Gronwall demuestra que

$$y(t) = x(t), \qquad t \in (x_0 - h, x_0 + h),$$

así que la solución es localmente única. Esto completa la demostración de la Proposición 3.2. □

3.2. Extensión de las soluciones

Una vez que tenemos esto no es difícil demostrar que hay una solución maximal, y que es única bajo las condiciones del Teorema 2.7.

4. Algunos métodos de resolución explícita de EDOs

Aunque la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no tienen solución explícita, hay muchos tipos importantes que sí la tienen. En esta sección describimos algunos métodos distintos para encontrarlas. Una de las familias más importantes de ecuaciones que siempre tienen una solución explícita son las ecuaciones lineales de coeficientes constantes, que estudiaremos a continuación en la Sección 5.

4.1. Variables separadas

En esta sección consideramos ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = g(y)h(t), \tag{21}$$

donde g, h son dos funciones dadas. Una ecuación de esta forma decimos que está escrita en *variables separadas*, y su solución puede reducirse al cálculo de primitivas. Supongamos por el momento que h, g están definidas en intervalos abiertos I, J de $\mathbb{R}$. Una familia de soluciones posibles son las soluciones constantes (si las hay): para cualquier $C \in \mathbb{R}$ con $g(C) = 0$ (si existe) la función

$$y(t) = C, \qquad t \in I$$

es una solución de (21). Con el método que describimos a continuación podemos encontrar las soluciones *que no tocan los ceros de g*. Supongamos que $y : I \to \mathbb{R}$ es una solución de (21) tal que $g(y(t)) \neq 0$ para $t \in I$. Entonces debe cumplir

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t), \qquad t \in I$$

o, para cualquier $t_0 \in I$,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

Podemos hacer un cambio de variable en la integral de la izquierda para obtener

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I. \tag{22}$$

Si podemos encontrar una primitiva de la función $1/g(y)$ en el intervalo $y \in J$, y otra de la función $h(t)$ para $t \in I$, la expresión anterior es una ecuación en la cual podemos encontrar $y(t)$ en función de t_0, t. Hemos reducido el problema al cálculo de primitivas, lo cual proporciona soluciones explícitas en muchos casos.

Una forma equivalente de escribir (22) es hacerlo con integrales indefinidas:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int h(s)\,\mathrm{d}s + C, \qquad t \in I, \tag{23}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante y las integrales sin límites de integración indican una primitiva cualquiera de la función.

Observación 4.1. El proceso para encontrar soluciones por separación de variables normalmente *sólo va en una dirección*: si suponemos que hay una solución $y = y(t)$ que no toca los ceros de g, entonces y tiene que cumplir la ecuación (22) (o (23), para alguna $C \in \mathbb{R}$). No hemos dicho en ningún momento que si se cumple (22) entonces y sea solución de la ecuación. Es importante darse cuenta de que estrictamente son dos cosas distintas (muy relacionadas, claro). Esto implica que una vez que hemos encontrado una solución explícita que cumple (22) siempre hay que comprobar que efectivamente es una solución, y en qué intervalo. Esto es importante también porque frecuentemente al resolver (22) para encontrar y es más fácil hacer un razonamiento en la misma dirección: si y cumple (22), entonces tiene que cumplir tal otra ecuación, y eso nos permite encontrar un candidato a solución, que luego hay que comprobar que efectivamente lo es.

De todas formas, es cierto que también se puede seguir el razonamiento "hacia atrás": tomemos $t_0 \in I$. Se puede demostrar (no es díficil) que

1. Si $y : I \to J$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I,
2. tal que $g(y(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$,
3. y que cumple (22),

entonces y es una solución de (21). Si lo que queremos es encontrar soluciones explícitas, esto no es más práctico que directamente comprobar si la expresión que hemos obtenido es solución. Por otra parte, a veces puede ser útil como resultado teórico.

Ejemplo 4.2. *Encontremos por este método las soluciones de*

$$y' = \lambda y,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ un parámetro. Sabemos de la sección anterior que sus soluciones son $y(t) = Ce^t$, para cierta $C > 0$. Veamos que el método de variables separadas da las mismas soluciones.

La única solución constante es $y(t) = 0$ para $t \in \mathbb{R}$. Para las soluciones que no se anulan nunca tenemos, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t} 1 \,\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\log \frac{|y(t)|}{|y(t_0)|} = t - t_0, \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$|y(t)| = |y(t_0)| e^{t-t_0}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dado que $y(t)$ tiene que tener el mismo signo que $y(t_0)$ (ya que para aplicar el método de variables separadas estamos suponiendo que la solución nunca cruza el 0),

$$y(t) = y(t_0) e^{t-t_0}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Estas soluciones son las mismas que las que conocíamos, tomando $C = y(t_0)e^{-t_0}$. De forma alternativa, podíamos haber usado (23) para escribir

$$\int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \int 1 \,\mathrm{d}s + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\log |y(t)| = t + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

luego

$$|y(t)| = e^C e^t,$$

lo cual da las dos posibilidades

$$y(t) = e^C e^t, \qquad y(t) = -e^C e^t,$$

que (junto con la solución constante $y(t) = 0$) forman de nuevo la misma familia de soluciones.

Ejemplo 4.3. *Podemos también resolver por este método la ecuación*

$$y' = h(t)y, \tag{24}$$

donde $h : I \to \mathbb{R}$ *es una función continua definida en cierto intervalo abierto* $I \subseteq \mathbb{R}$. *El dominio de esta ecuación es* $I \times \mathbb{R}$. *Siguiendo el método de variables separadas, y aparte de la solución constante* $y(t) = 0$ $(t \in I)$, *tenemos*

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int h(t)\,\mathrm{d}t + C,$$

con lo que tenemos

$$\log|y(t)| = H(t) + C,$$

donde H *es una primitiva de la función* h, *definida en* I *(que sabemos que existe por el teorema fundamental del cálculo). Entonces,*

$$y(t) = \pm e^C e^{H(t)}, \tag{25}$$

o, dicho de otra forma, obtenemos que las soluciones son

$$y(t) = Ke^{H(t)}, \qquad t \in I,$$

para cierta $K \in \mathbb{R}$. *Una vez que tenemos esta expresión podemos comprobar que son soluciones, y que son maximales (¿por qué?).*

Ejemplo 4.4. *Resolvemos ahora la ecuación*

$$y' = y^2. \tag{26}$$

La única solución constante es $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Aplicando el método de separación de variable buscamos todas las soluciones que no se anulan:*

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}t + C,$$

de lo cual obtenemos

$$-\frac{1}{y} = t + C, \qquad \textit{es decir,} \qquad y(t) = -\frac{1}{t+C}.$$

Podemos comprobar que esta expresión da una solución de (26) *en el intervalo* $(-\infty, -C)$, *o bien en el intervalo* $(-C, \infty)$ *(tenemos que evitar la singularidad donde la función no es derivable). La familia de soluciones que encontramos (además de la solución constante* $y(t) = 0$*) es por tanto*

$$y(t) = -\frac{1}{t+C}, \qquad t \in (-\infty, -C)$$

y

$$y(t) = -\frac{1}{t+C}, \qquad t \in (-C, \infty)$$

para $C \in \mathbb{R}$ *cualquier número. Se comprueba fácilmente que son efectivamente soluciones de* (26), *y que son además soluciones maximales (¿por qué?).*

Ejemplo 4.5. *Consideramos la ecuación logística o ecuación de Verhulst:*

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right), \tag{27}$$

donde r, K son constantes positivas. Esta ecuación tiene dos equilibrios: $y = 0$, $y = K$. Usando el método de separación de variables para buscar otras soluciones tenemos

$$\int \frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)}\,\mathrm{d}y = \int r\,\mathrm{d}t + C. \tag{28}$$

Para calcular la integral de la izquierda partimos la fracción en fracciones simples:

$$\frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K - y},$$

con lo cual

$$\int \frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)}\,\mathrm{d}y = \log|y| - \log|K - y|.$$

Usando esto en (28) tenemos

$$\log|y| - \log|K - y| = rt + C,$$

o equivalentemente

$$\frac{|y|}{|K - y|} = e^{rt+C} = C_1 e^{rt},$$

donde C_1 es una constante positiva. Para resolver esta ecuación distinguimos dos casos: cuando y tiene el mismo signo que $K - y$,

$$y = (K - y)C_1 e^{rt},$$

lo cual da

$$y(t) = \frac{KC_1 e^{rt}}{1 + C_1 e^{rt}}.$$

Por otra parte, cuando y tiene signo distinto de $K - y$,

$$y = -(K - y)C_1 e^{rt},$$

lo cual da

$$y(t) = \frac{KC_1 e^{rt}}{C_1 e^{rt} - 1}.$$

Llamando $C_2 = 1/C_1$ en el primer caso, y $C_2 = -1/C_1$ en el segundo, estas dos formas de la solución pueden escribirse de forma más corta como

$$y(t) = \frac{K}{1 + C_2 e^{-rt}},$$

donde C_2 es cualquier número real. Observa que la solución $y(t) = K$ está incluida en esta expresión (corresponde a $C_2 = 0$), pero $y(t) = 0$ no está incluida (corresponde al límite $C_2 = +\infty$).

Ejemplo 4.6. *El siguiente ejemplo es un poco más delicado:*

$$y' = \sqrt{|y|}. \tag{29}$$

Lo es porque esta ecuación no tiene soluciones únicas y hay que tener algo más de cuidado en las conclusiones que obtenemos del método. La única solución constante es $y(t) = 0$. *Las soluciones que no se anulen tienen que cumplir*

$$\int \frac{1}{\sqrt{|y|}} = \int 1 \, \mathrm{d}t + C,$$

que al resolver da

$$2\sqrt{|y|}\,\mathrm{sgn}(y) = t + C.$$

Esto implica que

$$4|y| = (t + C)^2,$$

así que las únicas opciones posibles son

$$y(t) = \frac{1}{4}(t + C)^2, \qquad y(t) = -\frac{1}{4}(t + C)^2.$$

Se comprueba sustituyendo directamente en la ecuación que la primera es solución sólo en el intervalo $(-C, +\infty)$, *mientras que la segunda lo es sólo en* $(-\infty, -C)$, *para cualquier* $C \in \mathbb{R}$. *Observa que hemos obtenido una expresión de las soluciones* que sólo es válida en una parte del dominio donde la expresión tiene sentido*: la función* $1/4(t+C)^2$ *está bien definida para todo* $t \in \mathbb{R}$, *pero sólo es solución en* $(-C, +\infty)$. *Esto es un ejemplo de razonamiento "en una sola dirección" del que hablaba en la Observación 4.1. Éstas son las soluciones que se obtienen directamente del método de variables separadas, pero no son soluciones maximales: por ejemplo, podemos "pegar" las dos para obtener*

$$y(t) = \frac{1}{4}(t + C)^2 \,\mathrm{sgn}(t + C) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t + C)^2 & \textit{cuando } t \leq -C, \\ \frac{1}{4}(t + C)^2 & \textit{cuando } t > -C. \end{cases}$$

También es posible extender la solución por 0. *En general, para cualesquiera* $C_1 \leq C_2 \in \mathbb{R}$, *la siguiente expresión es también una solución de* (29)

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - C_1)^2 & \textit{cuando } t \leq C_1, \\ 0 & \textit{cuando } C_1 < t \leq C_2, \\ \frac{1}{4}(t - C_2)^2 & \textit{cuando } t > C_2. \end{cases} \tag{30}$$

Junto con los casos límite $C_1 = -\infty$, $C_2 = +\infty$, *éstas son las únicas soluciones maximales de* (29) *(dicho de otra forma, se permite* $C_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $C_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *con* $C_1 \leq C_2$; *en la expresión* (30) *se entiende que si uno de los intervalos de definición es vacío entonces se omite). Observa que para una condición inicial dada siempre hay infinitas soluciones: puede que una condición inicial determine una de las constantes* C_1, C_2, *pero la otra siempre queda libre.*

El hecho de que son las únicas soluciones no puede deducirse de resultados anteriores que hayamos visto (por ejemplo, (29) *no cumple las condiciones del teorema general de unicidad). Sin embargo, podemos deducirlo del razonamiento que hemos seguido para resolver la ecuación por separación de variables: ese razonamiento nos dice que*

1. *Si una solución $y(t)$ es positiva en un intervalo $I = (a, b)$, entonces es igual a $\frac{1}{4}(t + C)^2$ para algún $C \leq a$.*

2. *Si una solución $y(t)$ es negativa en un intervalo $I = (a, b)$, entonces es igual a $-\frac{1}{4}(t + C)^2$ para algún $C \geq b$.*

A partir de esto se puede ver que (30) (incluyendo los casos límite) son las únicas soluciones. (¿Puedes completar el razonamiento?)

Ejemplo 4.7. *Resolvamos*

$$y' = y \cos t. \tag{31}$$

De nuevo, $y = 0$ es una solución constante. Para soluciones que no se anulan tenemos

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos t\,\mathrm{d}t + C,$$

es decir,

$$\log|y| = \sin t + C, \qquad \textit{luego} \qquad y(t) = \pm e^{C} e^{\sin t}.$$

Podemos comprobar que efectivamente las funciones

$$y(t) = K e^{\sin t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $K \in \mathbb{R}$ son soluciones de (31). Por el teorema de unicidad sabemos además que son las únicas soluciones maximales posibles.

4.2. Cambio de variable

El cambio de variable es una técnica para convertir una ecuación ordinaria en otra. Consiste simplemente en considerar una nueva incógnita x escrita en función de y, t, con la idea de que la nueva ecuación que satisface x sea más sencilla que la ecuación que satisface y. En esta sección explicamos cómo realizar un cambio de variable; la decisión de *qué cambio de variable hacer* es una cuestión que no tiene una respuesta general. En muchos problemas la idea de qué cambio de variable simplifica la ecuación viene de una comprensión más profunda del fenómeno al que corresponde la ecuación; en otros casos puede darse un cambio de variable que sirve para una familia grande de problemas (ver por ejemplo la Sección 4.3).

Supongamos que y es una solución de la ecuación

$$y' = f(t, y) \tag{32}$$

definida en cierto intervalo abierto I. Podemos considerar la función

$$x(t) = \phi(t, y(t)), \qquad t \in I, \tag{33}$$

donde $\phi = \phi(t, y)$ es una función definida en un conjunto abierto adecuado para que la expresión anterior tenga sentido. Normalmente suponemos que el cambio (33) también permite obtener y en función de x, esto es, que puede invertirse para cada t fijo y obtener

$$y(t) = \psi(t, x(t)), \qquad t \in I, \tag{34}$$

para cierta función $\psi = \psi(t, x)$. Si suponemos que ϕ es una función diferenciable podemos ver que x satisface una ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \partial_t\phi(t, y(t)) + \partial_y\phi(t, y(t))y'(t) = \partial_t\phi(t, y(t)) + \partial_y\phi(t, y(t))f(t, y(t)) \\ &= \partial_t\phi(t, \psi(t, x(t))) + \partial_y\phi(t, \psi(t, x(t)))f(t, \psi(t, x(t))). \end{aligned} \tag{35}$$

Esta última expresión es una función de t, $x(t)$, de forma que tenemos una ecuación diferencial ordinaria para x. Si encontramos una función x que la cumpla, entonces haciendo el cambio inverso vemos que la función y definida por (34) cumple nuestra ecuación original (32).

La expresión (35) no es sencilla de estudiar en general, y un teorema riguroso que relacione las ecuaciones (32) y (35) no es más útil en la mayoría de situaciones que una aplicación directa del método. Por esto veremos simplemente algunos ejemplos de uso de la herramienta de cambio de variables, sin un resultado teórico general. La Sección 4.3 involucra también cambios de variable, pero veamos ahora algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 4.8. *Busquemos las soluciones de la ecuación*

$$y' = y - t + 1. \tag{36}$$

El dominio donde esta ecuación está definida es todo $\mathbb{R}^2$, ya que la función a la derecha de la igualdad está definida naturalmente para todo (t, y). En principio no podemos resolver esta ecuación con el método de variables separadas (el único que hemos visto hasta ahora), y su solución no es obvia. A veces es útil un cambio de variable que involucra términos que ya aparecen en la ecuación. En este caso vamos a usar

$$x(t) = y(t) - t. \tag{37}$$

(No hay un motivo obvio por el que debamos hacer este cambio. Este ejemplo es sólo una ilustración de cómo un cambio de variables puede simplificar una ecuación.) La función ϕ que describíamos antes sería en este caso

$$\phi(t, y) = y - t,$$

y podemos deducir de (37) que

$$y(t) = x(t) + t, \tag{38}$$

de forma que la función ψ que da el cambio inverso correspondiente a (34) es

$$\psi(t, x) = x + t.$$

Tenemos entonces

$$x'(t) = y'(t) - 1 = y(t) - t + 1 - 1 = x(t).$$

Sabemos que las soluciones maximales de esta ecuación son

$$x(t) = Ce^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera. Usando (38) deducimos que

$$y(t) = Ce^t + t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

y comprobamos que efectivamente es solución de (36). Por el Teorema 2.7 de existencia y unicidad de soluciones sabemos que éstas son las únicas soluciones maximales, de forma que tenemos todas las soluciones de (36).

Ejemplo 4.9. *Sabemos resolver la ecuación*

$$y' = \lambda y, \tag{39}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un parámetro dado. Encontramos sus soluciones (por ejemplo) por el método de separación de variables:*

$$y(t) = Ce^{\lambda t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

y sabemos que son las únicas posibles por el Teorema 2.7. Hay también un método más sencillo para ver que son las únicas: supongamos que $y = y(t)$ *es una solución de* (39) *definida en un intervalo* I*. Consideramos el cambio*

$$x(t) := y(t)e^{-\lambda t}, \qquad t \in I.$$

El cambio inverso es obviamente

$$y(t) = x(t)e^{\lambda t}, \qquad t \in I.$$

La función x *es una función* $\mathscr{C}^1(I)$*, ya que es producto de de funciones* $\mathscr{C}^1(I)$*. Calculamos la ecuación diferencial ordinaria que satisface* x*:*

$$x'(t) = y'(t)e^{-\lambda t} - \lambda y(t)e^{-\lambda t} = \lambda y(t)e^{-\lambda t} - \lambda y(t)e^{-\lambda t} = 0, \qquad t \in I.$$

Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que $x' = 0$ *en un intervalo* I *implica que* $x(t) = C$ *en* I*, para cierta constante* $C \in \mathbb{R}$*. Por tanto,*

$$y(t) = x(t)e^{\lambda t} = Ce^{\lambda t}, \qquad t \in I.$$

Esto demuestra que las únicas soluciones posibles de (39) *son de esta forma. Como consecuencia directa vemos que las únicas soluciones* maximales *son las dadas en* (40)*. Esto es algo que ya sabíamos, pero con esta idea podemos obtenerlo directamente, sin usar el Teorema 2.7.*

Ejemplo 4.10. *Podemos también resolver la ecuación*

$$y' = \lambda y + b(t)$$

con el cambio

$$x = ye^{-\lambda t}.$$

En general, podemos resolver

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con el cambio

$$x = ye^{-A(t)},$$

donde $A(t)$ *es una primitiva de* a*.*

4.3. Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación del tipo

$$y' = q\left(\frac{y}{t}\right), \tag{41}$$

donde q es una función continua definida en un cierto conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}$. El dominio natural de la ecuación (41) es

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0, \quad y/t \in U\}.$$

Ejemplo 4.11. *La ecuación*

$$y' = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{t}\right) + \cos\left(\frac{y}{t}\right)$$

es del tipo (41)*, con*

$$q(s) = \sin s + \cos s, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.12. *La ecuación*

$$y' = \frac{\sqrt{t^2 + y^2}}{y} \tag{42}$$

es también del tipo (41)*. El motivo es que para $t > 0$ podemos reescribir la ecuación como*

$$y' = \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{t}\right)^2 + 1}}{\frac{y}{t}}. \tag{43}$$

En este caso la función q es

$$q(s) = \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s}, \qquad s \neq 0,$$

y el dominio que elegimos para (42) *es*

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, y \neq 0\}.$$

(Podemos incluir la parte $t < 0$ en el dominio, pero entonces la expresión (43) *no es válida).*

En general a ecuación (41) no es de variables separadas, pero puede reducirse a una es variables separadas a través del cambio de variable

$$x = \frac{y}{t}, \tag{44}$$

con inversa

$$y = tx. \tag{45}$$

Podemos ver que se obtiene

$$x' = \frac{y't - y}{t^2} = \frac{q\left(\frac{y}{t}\right)t - y}{t^2} = \frac{q(x) - x}{t}, \tag{46}$$

lo cual es una ecuación en variables separadas para x. Esta ecuación podemos resolverla con el método que conocemos (Sección 4.1), y deshacer el cambio para hallar y. Como siempre, hay que comprobar que la expresión obtenida es efectivamente una solución.

Ejemplo 4.13. *Resolvamos por este método un ejemplo sencillo:*

$$y' = \frac{y}{t}, \tag{47}$$

con dominio natural $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$*. Por supuesto, esta ecuación está ya en variables separadas y podríamos resolverla directamente, pero usemos el método que acabamos de describir para ver cómo funciona. Aquí la función* q *es* $q(s) = s$*, y el cambio que se propone hacer de acuerdo con* (44) *es*

$$x = \frac{y}{t}. \tag{48}$$

Con el cálculo que describimos antes obtenemos que x *cumple*

$$x' = \frac{q(x) - x}{t} = \frac{x - x}{t} = 0.$$

Por tanto x *debe ser una constante,*

$$x(t) = C,$$

lo cual da

$$y(t) = Ct. \tag{49}$$

Ya que el dominio de la ecuación (47) *no incluye puntos con* $t = 0$*, el dominio de esta solución es* $(0, +\infty)$ *o bien* $(-\infty, 0)$*. Obtenemos entonces que las soluciones de* (47) *son*

$$y(t) = Ct, \qquad t \in (-\infty, 0)$$

y

$$y(t) = Ct, \qquad t \in (0, \infty),$$

para $C \in \mathbb{R}$ *una constante arbitraria. Se comprueba fácilmente que son efectivamente soluciones, y que son las únicas soluciones maximales posibles (usando el Teorema 2.7, o bien siguiendo con cuidado el razonamiento que acabamos de hacer, de forma parecida al Ejemplo 4.9).*

Ejemplo 4.14. *Resolvamos*

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}.$$

El dominio natural de esta ecuación es $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0, y \neq 0\}$*. La función* q *correspondiente a la expresión* (41) *es*

$$q(s) = s + \frac{1}{s}, \tag{50}$$

definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Haciendo el cambio* $x = y/t$ *vemos que* x *satisface* (46)*:*

$$x' = \frac{q(x) - x}{t} = \frac{x + \frac{1}{x} - x}{t} = \frac{1}{tx}.$$

Esta ecuación es en variables separadas, y para encontrar x *podemos seguir el método de la Sección 4.1:*

$$\int x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t + C,$$

para cierta $C \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\frac{1}{2}x^2 = \log|t| + C, \qquad x(t) = \pm\sqrt{2\log|t| + 2C},$$

lo cual da

$$y(t) = \pm t\sqrt{2\log|t| + 2C}.$$

Estas soluciones están definidas en puntos donde $2\log|t| + 2C > 0$, es decir, en el intervalo $(-\infty, -e^{-C})$ o bien en el intervalo (e^{-C}, ∞). Debemos comprobar que efectivamente son soluciones en ambos intervalos (tanto la solución con el signo positivo como la negativa), y que hemos obtenido todas las soluciones maximales de la ecuación.

4.3.1. Cocientes de funciones homogéneas

Definición 4.15. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la siguiente propiedad: si $(t, y) \in D$ entonces $(\lambda t, \lambda y) \in D$ para cualquier $\lambda > 0$ (los conjuntos con esta propiedad se llaman *conos*). Decimos que una función $P : D \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$* cuando ocurre que

$$P(\lambda t, \lambda y) = \lambda^m P(t, y) \quad \text{para todo } \lambda > 0, \text{ para todo } (t, y) \in D. \tag{51}$$

Por ejemplo: si P es una suma de monomios en t, y del mismo grado m, entonces P es homogénea de grado m.

Un ejemplo importante de EDOs homogéneas son las que tienen la forma

$$y' = \frac{P(t, y)}{Q(t, y)}$$

para ciertas funciones P, Q homogéneas del mismo grado m. Podemos ver que esta ecuación es homogénea porque (por ejemplo para $t > 0$)

$$P(t, y) = P\left(t, t\frac{y}{t}\right) = t^m P\left(1, \frac{y}{t}\right),$$
$$P(t, y) = Q\left(t, t\frac{y}{t}\right) = t^m Q\left(1, \frac{y}{t}\right),$$

y dividiendo una ecuación por otra tenemos

$$\frac{P(t, y)}{Q(t, y)} = \frac{P\left(1, \frac{y}{t}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{t}\right)} = q\left(\frac{y}{t}\right), \tag{52}$$

donde

$$q(s) = \frac{P(1, s)}{Q(1, s)}.$$

En general, hay EDOs para las que no resulta evidente si son homogéneas o no. Una comprobación sencilla que podemos hacer es la siguiente caracterización: la EDO

$$y' = f(t, y)$$

es homogénea si y sólo si la función f es homogénea de grado 0. Esto es, si

$$f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$$

para todo $\lambda > 0$, para todo (t, y) en el dominio de f. En rigor, esto requiere que $(\lambda t, \lambda y)$ esté en D siempre que (t, y) esté en D, pero para la comprobación práctica normalmente no hace falta preocuparse de eso.

4.4. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Resuelve la ecuación diferencial

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde r, K son parámetros reales estrictamente positivos. Además, supuesto $r = 1$ y $K = 6$, determina las soluciones que satisfacen las siguientes condiciones iniciales.

1. $x(2) = -1$; *b*) $x(2) = 4$; *c*) $x(2) = 7$.

Ejercicio 4.2. Considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = x + t^2 - 2t - 2. \tag{53}$$

1. Comprueba que $x_p(t) = -t^2 + 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución particular de (53).
2. Aplica el cambio $x = y + x_p(t)$ para resolver (53).
3. Determina la solución de (53) que satisface la condición inicial $x(1) = 0$.
4. Determina la solución de (53) que satisface la condición inicial $x(1) = 1$.

Ejercicio 4.3. Considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = x\,\mathrm{tg}(t) + 2 \tag{54}$$

1. Resuelve la ecuación diferencial en variables separadas $x' = x\,\mathrm{tg}(t)$.
2. Aplica el cambio $x = y\frac{1}{\cos(t)}$ para resolver (54).
3. ¿Encuentras alguna relación entre los apartados 1 y 2?

Ejercicio 4.4. Sea el problema de valores iniciales

$$x' = 3\frac{t}{x} + \frac{x}{t}, \quad x(1) = -2.$$

1. Resuelve el problema propuesto. (Sugerencia: usa el cambio de variables $x = ut$.)
2. ¿Cuál es el intervalo maximal de definición de la solución hallada?

Ejercicio 4.5. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 2\,x - 3\,\frac{t}{x}. \tag{55}$$

1. Determina los posibles dominios maximales de (85).
2. Resuelve (85) empleando el cambio de variable $u = x^2$.
3. Determina la solución de (85) que satisface la condición inicial $x(0) = 1$, indicando el intervalo maximal donde está definida (de la forma más precisa posible).

Ejercicio 4.6. Resuelve la ecuación diferencial $(t^2 e^{-x/t} + x^2)\,\mathrm{d}t = tx\,\mathrm{d}x$.

Ejercicio 4.7. Indica la(s) opción(es) correcta(s) en cada una de las siguientes preguntas o afirmaciones.

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son de variables separadas?

   a) $x' = \sqrt{xt}$. *b)* $x' = e^{xt}$. *c)* $x' = \cos(xt)$.
   d) $x' = \sqrt{x+t}$. *e)* $x' = e^{x+t}$. *f)* $x' = \cos(x+t)$.

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas?

   a) $x' = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-t^2}{xt}\right)$. *b)* $x' = e^{x/t}$. *c)* $x' = \frac{x+t^2}{t+x^2}$.
   d) $x' = \sqrt{x+t}$. *e)* $x' = \frac{e^x}{e^t}$. *f)* $x' = \frac{t}{x} + \frac{x^2}{t^2}$.

3. Si en la ecuación diferencial $x' = \frac{x}{t}$ hacemos el cambio $y = \frac{x}{t}$ entonces obtenemos la ecuación ...

   a) $y' = y$. *b)* $y' = \frac{y}{t}$.
   c) $y' = 0$. *d)* Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Si en la ecuación diferencial $x' = 2\operatorname{sen}(4x+8t+16)$ hacemos el cambio $y = 4x+8t+16$ entonces obtenemos la ecuación ...

   a) $y' = 4\cos(y)$. *b)* $y' = 8\cos(y)$. *c)* $y' = 8(\cos(y)+1)$.
   d) $y' = 4\operatorname{sen}(y)$. *e)* $y' = 8\operatorname{sen}(y)$. *f)* $y' = 8(\operatorname{sen}(y)+1)$.

5. Sea la ecuación diferencial $x''(t) + x'(t) + 2x(t) = \frac{(x'(t))^2}{2x(t)}$. El cambio de variable $x = y^2$ da lugar a la ecuación ...

   a) $y(t)(1+y(t)) = 0$. *b)* $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$.
   c) $y''(t) + y'(t) + y^2(t) = \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2$. *d)* Ninguna de las anteriores.

6. Una solución del problema de valores iniciales

$$x'(t) = x(t)\, e^t,\ x(1) = 0,$$

   es ...

   a) $x(t) = e^{t-1},\ \forall t > 0$. *b)* $x(t) = 2,\ \forall t \geq 0$.
   c) El problema no tiene solución. *d)* Ninguna de las anteriores.

7. La solución del problema de valores iniciales

$$x'(t) = x^2(t),\ x(0) = \frac{1}{3},$$

   es ...

a) $x(t) = \frac{1}{3-t}$, $\forall t \in]3, \infty[$.   b) $x(t) = \frac{1}{3+t}$, $\forall t \in]-3, \infty[$.

c) $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{t}$, $\forall t \in]0, \infty[$.   d) Ninguna de las anteriores.

8. La función $x(t) = t + a$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferencial

$$x' = (t-1)^3 - 3(t-1)^2 x + 3(t-1)x^2 - x^3$$

si ...

a) $a = -2$ b) $a = -1$ c) $a = 0$

d) $a = 1$ e) $a = 2$ f) Ninguna de las anteriores.

5. Ecuaciones lineales

Como sabemos, una ecuación diferencial ordinaria (en forma normal) es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{56}$$

Uno de los casos más sencillos es aquél donde la función f que define la ecuación es afín como función de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, para cada t fijo:

Definición 5.1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $b, a_0, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ funciones (donde $n \geq 1$ es un entero, el grado de la ecuación). Una ecuación diferencial lineal es una expresión del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \tag{57}$$

Decimos que la ecuación es *lineal homogénea* cuando $b(t) = 0$ para todo $t \in I$. La ecuación que queda al quitar $b(t)$,

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{58}$$

se llama *ecuación lineal homogénea asociada a* (57).

Observa que las funciones $a_0, \dots, a_{n-1}$ o b pueden tener cualquier dependencia en t (no tienen por qué ser lineales). La característica principal de la ecuación (57) es que, para cada $t \in I$ fijo, es una expresión afín como función de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

En esta sección normalmente supondremos que

$$\begin{gathered} n \geq 1 \text{ es un entero,} \\ I \subseteq \mathbb{R} \text{ es un intervalo abierto no vacío,} \\ a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R} \text{ son funciones continuas.} \end{gathered} \tag{59}$$

Las ecuaciones lineales son mucho más sencillas que una ecuación diferencial general y en muchos casos podemos encontrar sus soluciones explícitas, como veremos en esta sección. Son también importantes porque hay muchas situaciones donde una ecuación lineal se comporta como una no lineal (por ejemplo, cerca de puntos de equilibrio), así que las ecuaciones lineales son una especie de "modelo" para el comportamiento de sistemas más complicados.

El Teorema 2.7 sobre existencia y unicidad de soluciones se aplica por supuesto a las ecuaciones lineales. De hecho, en este caso podemos decir un poco más:

Teorema 5.2. *Supongamos* (59). *Todas las soluciones maximales e la ecuación lineal* (57) *están definidas en todo el intervalo* I.

Esto quiere decir que las soluciones de las ecuaciones lineales nunca explotan; sólo pueden dejar de estar definidas porque se salgan del dominio donde están definidos los coeficientes de la ecuación.

5.1. Estructura del espacio de soluciones de la ecuación homogénea

Una propiedad fundamental de las ecuaciones lineales es la siguiente:

Lema 5.3. *Suponemos las condiciones de la Definición 5.1. Si* x, y *son soluciones de la ecuación* (57) *en un intervalo abierto* $J \subseteq I$ *entonces la función*

$$z(t) := y(t) - x(t), \qquad t \in J,$$

es solución de la ecuación lineal homogénea (58). *A la inversa, si* z *es cualquier solución de la ecuación homogénea* (58) *en un intervalo abierto* $J \subseteq I$ *y* x *es una solución de la ecuación lineal* (57) *en* J, *entonces la función*

$$y(t) := z(t) + x(t)$$

es otra solución de (57).

Ejercicio 5.1. Demuestra el lema anterior.

En particular (usando el lema para el caso $b(t) = 0$), si x, y son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea (58) entonces $x+y$ es otra solución de (58). Esta propiedad se llama *principio de superposición* en algunos contextos: si “superponemos” dos soluciones de (58) obtenemos otra. También es cierto que si multiplicamos una solución de (58) por un número obtenemos otra solución de (58). Otra forma de decir esto es la siguiente:

Lema 5.4. *Supongamos* (59). *El conjunto de soluciones maximales de la ecuación lineal homogénea* (58) *es un espacio vectorial real de dimensión* n *(con la suma usual de funciones, y el producto por escalares usual).*

Demostración. Por el Teorema 5.2 sabemos que todas las soluciones maximales están definidas en I, así que tiene sentido considerar la suma de dos de ellas. Llamamos

$$S := \{y : I \to \mathbb{R} \mid y \text{ es solución de (58). } \} \tag{60}$$

No vamos a demostrar el hecho de que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial: queda como ejercicio.

Para ver que el espacio vectorial de las soluciones tiene dimensión n vamos a usar la idea de que una solución está determinada unívocamente por n números: las n condiciones iniciales que podemos elegir en cualquier punto $t_0 \in I$. Esto se puede formalizar rigurosamente como un isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial S, que definimos de la siguiente forma: fijado $t_0 \in I$ ponemos

$$\Phi \colon S \to \mathbb{R}^n$$
$$\Phi(y) := (y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)), \qquad y \in S.$$

Las propiedades de esta función Φ pueden deducirse del Teorema 5.2, el Lema 5.3 y del Teorema 2.7. La función Φ es lineal, inyectiva (porque la solución de un problema de valores iniciales es única) y sobreyectiva (porque un problema de valores iniciales siempre tiene solución). Esto significa que Φ es un isomorfismo, y en particular prueba que S tiene dimensión n. □

Ejemplo 5.5. *La ecuación $x' = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, tiene como soluciones*

$$x(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Este espacio de funciones tiene dimensión 1; una base es por ejemplo $(e^{\lambda t})$.

Ejemplo 5.6. *La ecuación $x'' = x$, tiene como soluciones*

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ constantes. Este espacio de funciones tiene dimensión 2; una base es por ejemplo (e^t, e^{-t}). Otra base es $(\cosh(t), \operatorname{senh}(t))$. (¿Puedes comprobar que esto es efectivamente otra base?)

5.2. Estructura del espacio de soluciones de la ecuación completa

A partir del Lema 5.3 es fácil obtener la siguiente relación entre una ecuación completa y la ecuación homogénea asociada:

Teorema 5.7. *Supongamos (59). Sea y_p una solución maximal de la ecuación lineal completa (57). Entonces cualquier solución y de (57) puede escribirse como*

$$y = y_p + x, \tag{61}$$

donde x es una solución de la ecuación homogénea (58).

Ejemplo 5.8. *Esto nos permite por ejemplo resolver la ecuación $y'' - y = t$ sabiendo que $y_p(t) = -t$ es una solución particular.*

5.3. Independencia lineal de funciones

La independencia lineal de funciones es un caso particular de la independencia lineal de elementos de un espacio vectorial. La definición es la siguiente:

Definición 5.9. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $n \geq 1$ un entero. Decimos que las funciones $\phi_1, \dots, \phi_n \colon I \to \mathbb{R}$ son *linealmente dependientes* si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 \phi_1(t) + \cdots + \lambda_n \phi_n(t) = 0 \qquad \text{para todo } t \in I.$$

En caso contrario decimos que las funciones $\phi_1, \dots, \phi_n \colon I \to \mathbb{R}$ son *linealmente independientes*.

En el caso de querer comprobar que n funciones son independientes, la no existencia de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ como en la definición es difícil de demostrar directamente. Una forma fácil de ver que n funciones son linealmente independientes es la siguiente:

Lema 5.10. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $n \geq 1$ un entero, $t_0 \in I$, $\phi_1, \dots, \phi_n \colon I \to \mathbb{R}$ funciones n veces derivables en t_0. Si los vectores*

$$v_i := (\phi_1(t_0), \phi_1'(t_0), \dots, \phi_1^{(n-1)}(t_0)), \qquad i = 1, \dots, n$$

son linealmente independientes, entonces las funciones $\phi_1, \dots, \phi_n$ son linealmente independientes.

Demostración. En caso contrario existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 \phi_1(t) + \dots + \lambda_n \phi_n(t) = 0 \qquad \text{para todo } t \in I.$$

Calculando las n primeras derivadas de esta expresión en t_0 tenemos

$$\lambda_1 \phi_1^{(j)}(t) + \dots + \lambda_n \phi_n^{(j)}(t) = 0 \qquad \text{para todo } t \in I,\ j = 0, \dots, n-1,$$

es decir,

$$\lambda_1 v_1 + \dots, \lambda_n v_n = 0,$$

lo cual dice que $v_1, \dots, v_n$ son linealmente dependientes. □

Definición 5.11 (Wronskiano)**.** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $n \geq 1$ un entero, $t_0 \in I$, $\phi_1, \dots, \phi_n \colon I \to \mathbb{R}$ funciones $n-1$ veces derivables en t_0. Definimos

$$W[\phi_1, \dots, \phi_n](t_0) := \det \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_1'(t_0) & \cdots & \phi_1^{(n-1)}(t_0) \\ \phi_2(t_0) & \phi_2'(t_0) & \cdots & \phi_2^{(n-1)}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(t_0) & \phi_n'(t_0) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \det(\phi_i^{(j)}(t_0)),$$

donde en la última expresión i va desde 1 hasta n, j va desde 0 hasta $n-1$.

El Lema 5.10 puede leerse entonces como sigue: dadas n funciones $\phi_1, \dots, \phi_n$, si su Wronksiano en un punto t_0 es no nulo entonces las funciones son linealmente independientes. El siguiente resultado nos dice que esta condición es también necesaria cuando las funciones ϕ_i son soluciones de la misma ecuación diferencial:

Lema 5.12. *Supongamos* (59)*, y sean $\phi_1, \dots, \phi_n \colon I \to \mathbb{R}$ soluciones de la ecuación diferencial* (57)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Las funciones $\phi_1, \dots, \phi_n$ son linealmente independientes.*
2. *$W[\phi_1, \dots, \phi_n](t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*
3. *$W[\phi_1, \dots, \phi_n](t) \neq 0$ para algún $t \in I$.*

Demostración. Está claro que el punto 2 implica el 3, y el 3 implica el 1 por el Lema 5.10. Veamos que el 1 implica el 2. Si no fuera así, existe $t_0 \in I$ tal que los vectores

$$v_i := (\phi_1(t_0), \phi_1'(t_0), \dots, \phi_1^{(n-1)}(t_0)), \qquad i = 1, \dots, n$$

son linealmente dependientes. El isomorfismo Φ que definimos en la demostración del Lema 5.4 cumple

$$\Phi(\phi_i) = v_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Por tanto las funciones $\phi_1, \dots, \phi_n$ son también linealmente dependientes, lo cual contradice el punto 1. □

5.4. La ecuación lineal de primer orden

5.4.1. La ecuación homogénea

El caso de una única ecuación de primer orden es el más fácil, como se puede esperar. Consideremos primero la ecuación homogénea

$$x' = a(t)x, \tag{62}$$

con $a\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. La solución de (62) puede encontrarse explícitamente de varias formas (por ejemplo, es una ecuación en variables separadas). Sus soluciones son

$$x(t) = Ce^{A(t)}, \tag{63}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante cualquiera y $A(t)$ es cualquier primitiva de a en I (es decir, una función derivable en I tal que $A'(t) = a(t)$ para todo $t \in I$).

5.4.2. La ecuación completa: variación de constantes

Veamos ahora cómo resolver la ecuación completa

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{64}$$

donde $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas e $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Cuando $b(t)$ no aparece esta ecuación es homogénea y hemos aprendido a resolverla en la sección anterior: sabemos que todas sus soluciones son de la forma $x(t) = Ce^{A(t)}$, donde A es una primitiva de a en I y $C \in \mathbb{R}$ es una constante. La idea del método de variación de constantes es buscar una solución de (64) de la forma

$$x(t) = C(t)e^{A(t)}, \tag{65}$$

donde $C = C(t)$ es ahora una función que depende de t. Estamos "variando" la constante C que aparecía en la solución (63), de ahí el nombre del método. Si esta función x tiene que ser solución de (64), sustituyendo vemos que debe ocurrir

$$C'(t)e^{A(t)} + A'(t)C(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t).$$

Es decir, sabiendo que $A'(t) = a(t)$ y cancelando el término repetido,

$$C'(t)e^{A(t)} = b(t),$$

o lo que es igual,

$$C'(t) = e^{-A(t)}b(t).$$

Podemos resolver esta ecuación para obtener

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s + K \qquad \text{para todo } t \in I,$$

donde $t_0 \in I$ es un punto cualquiera de I y $K \in \mathbb{R}$ es una constante. Con esta expresión de $C(t)$ vemos que la solución x debe ser

$$x(t) = Ke^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s = Ke^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Si además queremos que la solución x cumpla la condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \tag{66}$$

para cierto $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces lo más sencillo es elegir la primitiva $A(t)$ de forma que $A(t_0) = 0$ (ten en cuenta que siempre tenemos una constante de libertad para elegir la primitiva),

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s,$$

y entonces podemos ver que la solución tiene que ser

$$x(t) = x_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = K e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} b(s)\,\mathrm{d}s. \tag{67}$$

Vamos a ver que con esta idea hemos resuelto la ecuación (64). Sin embargo, es importante darse cuenta de que el razonamiento que hemos hecho hasta ahora no es una demostración. Nuestro razonamiento ha sido el siguiente: *en el caso de que la ecuación* (64) *con valor inicial tuviera una solución de la forma* (65), entonces x tiene que ser (67). Para ser precisos, nos falta comprobar que (67) es efectivamente una solución, y entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.13. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto no vacío, $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ funciones continuas. La única solución maximal del problema de valores iniciales*

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

es

$$x(t) = x(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} b(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I. \tag{69}$$

Ejercicio 5.2. Demuestra este teorema rigurosamente.

5.5. La ecuación lineal de orden n

La ecuación lineal de orden mayor o igual a 2 no puede en general resolverse explícitamente como la de orden 1. En su lugar vamos a ver un método que permite, una vez que conocemos una solución de la ecuación homogénea, convertirla en una ecuación de orden $n - 1$.

Siempre podemos encontrar una solución particular de la ecuación completa usando una versión del método de variación de constantes.

5.5.1. Reducción de orden para la ecuación homogénea

Si tenemos una solución ϕ de la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \tag{70}$$

el método de reducción de orden consiste en considerar el cambio de variable

$$x(t) = \phi(t)z(t).$$

Al sustituir en la ecuación, el términos que va multiplicado por z es precisamente $\phi^{(n)} + a_{n-1}(t)\phi^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\phi' + a_0(t)\phi$, que se anula porque ϕ es solución de (70). La ecuación resultante depende por tanto solo de $z', z'', \ldots, z^n$, y se convierte en una ecuación de orden $n - 1$ con el cambio $y = z'$.

5.5.2. Variación de constantes

Consideramos ahora la ecuación lineal completa

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t), \tag{71}$$

con las condiciones usuales sobre a_i, b. Vamos a describir un método para encontrar una solución particular, con lo cual (gracias al Teorema 5.7) el problema se reduce a conocer las soluciones de la ecuación homogénea. (Como hemos visto en la sección anterior, no siempre podemos encontrar soluciones explícitas de la ecuación homogénea, pero al menos es en principio un problema más fácil).

La ecuación de segundo orden Consideramos para empezar la ecuación

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \tag{72}$$

Supongamos que tenemos un sistema fundamental de soluciones $\{\phi_1, \phi_2\}$ de la ecuación homogénea $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$. Podemos intentar buscar una solución de (72) de la forma

$$y(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t).$$

Derivando una vez (y omitiendo la variable t),

$$y' = c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 + c_1\phi_1' + c_2\phi_2'.$$

Si suponemos que

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 = 0, \tag{73}$$

entonces

$$y' = c_1\phi_1' + c_2\phi_2'.$$

Derivando una vez más,

$$y'' = c_1\phi_1'' + c_2\phi_2'' + c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2'.$$

Sustituyendo en (72), tenemos que elegir c_1, c_2 de forma que

$$c_1\phi_1'' + c_2\phi_2'' + c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' + a_1(c_1\phi_1' + c_2\phi_2') + a_0(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = b,$$

o lo que es lo mismo,

$$c_1(\phi_1'' + a_1\phi_1' + a_0\phi_1) + c_2(\phi_2'' + a_1\phi_2' + a_0\phi_2) + c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' = b.$$

Los coeficientes de c_1, c_2 se anulan porque ϕ_1, ϕ_2 son soluciones de (72) y por tanto

$$c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' = b.$$

Junto con (73), esto nos da el sistema

$$\begin{aligned} c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' &= b \\ c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

que nos permite encontrar c_1', c_2' porque la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo (es precisamente la matriz que aparece en la definición del Wronskiano, y sabemos que ϕ_1, ϕ_2 son soluciones linealmente independientes).

La ecuación de orden n La forma general del método de variación de constantes para una ecuación de orden n pasa por reescribirla como un sistema de n ecuaciones de orden 1. Describiremos este método en la Sección 6.

5.6. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes

Una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes es una ecuación del tipo (57) donde los coeficientes de la parte homogénea no dependen de t; es decir, una ecuación ordinaria del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t), \tag{74}$$

donde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $b : I \to \mathbb{R}$ es una función definida en cierto intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Como siempre, supondremos que b es continua en I. Observa que no pedimos que b sea constante; sólo requerimos que sean constantes los coeficientes de la parte homogénea, los que multiplican a la función y sus derivadas.

Estas ecuaciones tienen siempre una solución que podemos escribir explícitamente en términos de cálculo de funciones primitivas. En esta sección vamos a ver cómo encontrarlas.

5.6.1. La ecuación homogénea: solución general

Consideramos la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0, \tag{75}$$

donde $n \geq 1$ es un entero, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Intentemos primero buscar soluciones de la forma

$$z(t) = e^{\lambda t}$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Una primera observación es las derivadas de z son simplemente multiplicaciones por potencias de λ:

$$z^j(t) = \lambda^j z(t), \qquad j \geq 0.$$

Sustituyendo en (75), debe cumplirse

$$\lambda^n z + a_{n-1}\lambda^{n-1} z + \cdots + a_0 z = 0.$$

Si $z(t) \neq 0$ para algún $t \in I$, entonces debe ocurrir que

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Es decir: λ debe ser una raíz del polinomio que aparece a la izquierda. Esto nos da una forma sencilla de encontrar algunas soluciones de (75): si λ es una raíz real del polinomio $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces $e^{\lambda t}$ es una solución de (75).

Definición 5.14. Sea $n \geq 1$ es un entero, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. El *polinomio característico* de la ecuación (75) es

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Sabemos por el Lema 5.4, para resolver (75) completamente es suficiente encontrar n soluciones linealmente independientes. Si el polinomio característico de la ecuación tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ entonces las funciones

$$e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$$

son n soluciones de la ecuación.

Ejercicio 5.3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son n números distintos, demuestra que las funciones $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ son linealmente independientes.

Esto nos dice que ya sabemos resolver la ecuación (75) en el caso en que el polinomio característico tiene n raíces reales distintas. ¿Qué pasa cuando hay alguna raíz real repetida? En ese caso nos preguntamos si las funciones

$$z_k(t) = t^k e^{\lambda t}$$

pueden ser solución, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ entero. El hecho es el siguiente:

Lema 5.15. *Si λ es una raíz real de p con multiplicidad k, entonces z_k es una solución de (75).*

Ejercicio 5.4. Sea $k \geq 0$ entero. Demuestra que las funciones $\{z_0(t), \ldots, z_k(t)\}$ son linealmente independientes.

¿Qué pasa cuando hay alguna raíz compleja $\lambda = a + ib$? Como el polinomio p tiene coeficientes reales, su conjugada $\bar{\lambda} = a - ib$ es también una raíz. En ese caso las funciones $e^{\lambda t}$, $e^{\bar{\lambda} t}$ son formalmente soluciones (cumplen la ecuación diferencial), pero no lo son en el sentido de la definición 2.1 porque no son reales (toman valores complejos). Una forma de arreglarlo es considerar las funciones

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}) = e^{at}\cos(bt), \\ y(t) &= \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}) = e^{at}\operatorname{sen}(bt). \end{aligned}$$

Podemos comprobar que son de hecho soluciones de (75).

Teorema 5.16 (Solución de la ecuación homogénea de grado n con coeficientes constantes)**.** *Sea $n \geq 1$ es un entero, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sea p el polinomio característico de la ecuación (75), y denotemos sus raíces reales por $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y las complejas por $\mu_1, \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_\ell, \bar{\mu}_\ell$. Formamos una lista $\mathcal{B}$ de funciones de la siguiente forma:*

1. *Por cada raíz real λ con multiplicidad m añadimos las m funciones*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}.$$

2. *Por cada par de raíces complejas $\mu = a + ib$, $\bar{\mu} = a - ib$ con multiplicidad m añadimos las $2m$ funciones*

$$\begin{gathered} e^{at}\cos(bt), te^{at}\cos(bt), \ldots, t^{m-1}e^{at}\cos(bt), \\ e^{at}\operatorname{sen}(bt), te^{at}\operatorname{sen}(bt), \ldots, t^{m-1}e^{at}\operatorname{sen}(bt). \end{gathered}$$

Esto da un total de n funciones (ya que el polinomio $p(\lambda)$ tiene grado n). Entonces $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de (75).

Ejemplo 5.17. *Consideramos la ecuación*

$$y'' = -ky - ry',$$

con $k, r > 0$ constantes positivas.

5.6.2. La ecuación completa: método de coeficientes indeterminados

Una vez que tenemos la solución de la ecuación homogénea (75), siempre podemos resolver la ecuación completa usando el método de variación de constantes como hemos visto en la sección 5.5.2. Sin embargo, a veces el siguiente método nos permite encontrar las soluciones con mucha más facilidad. La idea es buscar soluciones de una forma específica que intentamos "adivinar" de antemano. La razón por la que el método funciona es que usando otro tipo de argumentos podemos saber que efectivamente siempre podemos encontrar una solución de este tipo, pero por ahora no vamos a ver la demostración. Para aplicar el método, basta con saber qué tipo de soluciones debemos "probar" en cada momento.

El método se aplica a ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t), \tag{76}$$

donde $a_0, \dots, a_{n-1}$ son coeficientes reales y $b(t)$ es una función con cierta forma específica: *debe ser una suma de senos, cosenos o exponenciales multiplicados por polinomios.* El método general es el siguiente: sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera.

1. Si $b(t)$ contiene combinaciones lineales de las funciones $e^{\lambda t}$ multiplicadas por un polinomio $q(t)$, debemos buscar una solución de la forma $r(t)e^{\lambda t}$, donde $r(t)$ es un polinomio del mismo grado que $q(t)$ o superior.

2. Si $b(t)$ contiene combinaciones lineales de las funciones $\operatorname{sen}(\lambda t)$, $\cos(\lambda t)$, multiplicadas por polinomios $q_1(t)$, $q_2(t)$, debemos buscar una solución de la forma $r_1(t)\operatorname{sen}(\lambda t) + r_2(t)\cos(\lambda t)$, donde $r_1(t)$, $r_2(t)$ son polinomios de grado igual al máximo grado de q_1, q_2, o superior.

El método general está resumido en la siguiente tabla:

Si $b(t)$ es del tipo...	Buscamos soluciones de la forma...
$q(t)e^{\lambda t}$	$r(t)e^{\lambda t}$
$q_1(t)\operatorname{sen}(\lambda t) + q_2(t)\cos(\lambda t)$	$r_1(t)\operatorname{sen}(\lambda t) + r_2(t)\cos(\lambda t)$

Cuadro 1: Método de coeficientes indeterminados

Observación 5.18. Si $b(t)$ contiene sumas de varios términos del tipo anterior (por ejemplo, contiene exponenciales y senos, o es una suma del tipo $e^{\lambda t} + e^{\mu t}$) con λ, μ distintos) entonces intentamos una solución que es suma de los tipos correspondientes a cada uno de los sumandos.

Observación 5.19. El caso en que $b(t)$ es un polinomio corresponde al caso particular de las exponenciales con $\lambda = 0$. En ese caso, siguiendo el método, debemos buscar soluciones polinómicas del mismo grado que b o superior.

Observación 5.20. Hay un caso que sirve de "atajo" para evitarnos buscar soluciones con demasiados coeficientes: cuando algunos de los términos que aparecen en la solución particular que estamos buscando son soluciones de la ecuación homogénea, podemos quitarlos directamente. El motivo es que sabemos que a cualquier solución particular podemos sumarle una solución de la ecuación homogénea y sigue siendo una solución particular. Por ejemplo: si estamos buscando soluciones de la ecuación

$$x'' + 4x = \operatorname{sen}(2t), \tag{77}$$

sabemos que $\{\operatorname{sen}(2t), \cos(2t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. Si aplicamos directamente el método de coeficientes indeterminados deberíamos probar a buscar una solución particular de (77) de la forma

$$x(t) = A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t),$$

pero sabemos que no puede haberlas porque lo que hemos escrito es siempre una solución de la ecuación homogénea. Por tanto deberíamos aumentar en uno el grado del polinomio y buscar

$$x(t) = A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t) + Ct\operatorname{sen}(2t) + Dt\cos(2t).$$

En realidad, si existe una solución particular de esta forma, también existe una de la forma

$$x(t) = Ct\operatorname{sen}(2t) + Dt\cos(2t),$$

que es más fácil de encontrar.

Por supuesto, este es un método completamente específico para ecuaciones donde el término independiente b tiene una forma particular. Por otra parte, es un método muy práctico porque los términos de este tipo son muy comunes, y esta idea es normalmente mucho más rápida de aplicar que el método general de variación de constantes. Lo mejor es ver su funcionamiento en algunos ejemplos.

Ejemplo 5.21.

$$y'' = -y + y$$

Ejemplo 5.22.

$$x'' - 2x' + x = t$$

5.6.3. El oscilador armónico y los fenómenos de resonancia

Consideramos la ecuación

$$y'' = -ky + \operatorname{sen}(\omega t),$$

donde $k, \omega > 0$ son constantes. Podemos encontrar una solución particular usando el método de coeficientes indeterminados: buscamos una solución del tipo

$$y(t) = A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t).$$

Obtenemos

$$y''(t) = -A\omega^2\operatorname{sen}(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t),$$

luego debe cumplirse que

$$-A\omega^2\operatorname{sen}(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) = -kA\operatorname{sen}(\omega t) - kB\cos(\omega t) + \operatorname{sen}(\omega t),$$

es decir,

$$(A(k-\omega^2) - 1)\operatorname{sen}(\omega t) + B(k-\omega^2)\cos(\omega t) = 0.$$

Por tanto

$$B(k-\omega^2)=0, \qquad A(k-\omega^2)=1. \tag{78}$$

Supongamos primero que $k \neq \omega^2$ (esto se llama el *caso no resonante*)). Entonces debe ocurrir que $B=0$ y que

$$A=\frac{1}{k-\omega^2},$$

lo cual nos da

$$y(t)=\frac{1}{k-\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t),$$

una función oscilatoria del mismo periodo que la fuerza que se ejerce sobre el sistema, con amplitud $(k-\omega^2)^{-1}$.

Supongamos ahora que estamos en el *caso resonante* en el que $k=\omega^2$. Entonces (78) no puede cumplirse nunca, así que no hay soluciones del tipo que hemos buscado. En su lugar debemos intentarlo con soluciones del tipo

$$y(t)=A\operatorname{sen}(\omega t)+B\cos(\omega t)+Ct\operatorname{sen}(\omega t)+Dt\cos(\omega t).$$

En realidad, sabemos que $\operatorname{sen}(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ son soluciones de la ecuación homogénea, así que no necesitamos incluirlas. Lo intentamos con funciones del tipo

$$y(t)=Ct\operatorname{sen}(\omega t)+Dt\cos(\omega t).$$

Obtenemos

$$y''(t)=2\omega C\cos(\omega t)-2\omega D\operatorname{sen}(\omega t)-C\omega^2t\operatorname{sen}(\omega t)-D\omega^2t\cos(\omega t),$$

luego debe cumplirse que

$$\begin{aligned}2\omega C\cos(\omega t)-2\omega D\operatorname{sen}(\omega t)-C\omega^2t\operatorname{sen}(\omega t)-D\omega^2t\cos(\omega t)&\\ =Ckt\operatorname{sen}(\omega t)+Dkt\cos(\omega t)+\operatorname{sen}(\omega t),&\end{aligned}$$

es decir (usando que $k=\omega^2$),

$$2\omega C\cos(\omega t)-2\omega D\operatorname{sen}(\omega t)=\operatorname{sen}(\omega t).$$

Esto implica que

$$C=0, \qquad 2\omega D=1$$

y finalmente

$$y(t)=\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

Observa que esta solución es no acotada: son oscilaciones cuya amplitud crece linealmente cuando $t\to\infty$.

5.7. Circuitos RLC

Un circuito RLC es un circuito idealizado con una resistencia, una bobina con cierta inductancia, y un condensador. Todos los circuitos contienen estos efectos en mayor o menor medida. La ecuación que rige la intensidad total $i = i(t)$ que pasa a través del circuito es

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = E',$$

donde

$$\begin{aligned} L &\equiv \text{inductancia} \\ R &\equiv \text{resistencia} \\ C &\equiv \text{capacitancia} \\ E = E(t) &\equiv \text{fuerza electromotriz} \end{aligned}$$

Podemos también escribir la ecuación en función de la carga $q = q(t)$ del circuito, teniendo en cuenta que

$$i(t) = q'(t),$$

lo cual da (eligiendo la constante de integración correcta)

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E.$$

5.8. La ecuación de Euler

En general no podemos resolver una ecuación lineal homogénea de segundo orden o mayor cuando los coeficientes no son constantes, pero hay casos específicos donde sí se puede. Un ejemplo famoso son las ecuaciones de la forma

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 t x' + \beta x = 0, \tag{79}$$

donde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son coeficientes reales. Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones de Euler*. Observa que el orden de las derivadas coincide con el grado de la potencia de t en su coeficiente. Para resolver una ecuación del tipo (79) vamos a usar un cambio *en la variable de la ecuación*, y no en la función directamente como hicimos en la sección 4.2. El dominio natural de (79) es

$$D = \{(t, x, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \neq 0\}, \tag{80}$$

que no incluye puntos donde $t = 0$. Por tanto, buscamos soluciones definidas para $t > 0$ o soluciones definidas para $t < 0$, pero en realidad es prácticamente lo mismo por lo siguiente:

Ejercicio 5.5. Demuestra que si y es una solución de (79) definida en un intervalo $I \subseteq (0, +\infty)$ entonces la función

$$\tilde{y}(t) := y(-t), \qquad t \in -I \subseteq (-\infty, 0)$$

es otra solución, definida, en $-I$.

Vamos a buscar entonces soluciones definidas para $t > 0$. La idea del método es considerar la nueva incógnita

$$z(s) = y(e^s),$$

definida para $s \in \mathbb{R}$. Observa que e^s siempre es positivo. El cambio de variable inverso es

$$y(t) = z(\log t), \qquad t > 0.$$

Normalmente ponemos

$$s = \log t$$

y escribimos el cambio como

$$z(s) = y(t)$$

porque es más corto, pero es importante saber lo que significa.

Ecuación de segundo orden Para verlo un poco más en detalle, vamos a hacer el cálculo en el caso de una ecuación de segundo orden de tipo Euler:

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0, \tag{81}$$

con α, β constantes reales. Para escribir (81) en términos de z vamos a calcular las derivadas de y en función de z:

$$y'(t) = \frac{1}{t} z'(s),$$
$$y''(t) = \frac{1}{t^2} \left(z''(s) - z'(s) \right)$$

luego (81) queda como

$$z''(s) + (\alpha - 1) z'(s) + \beta z(s) = 0$$

Esto da una ecuación con coeficientes constantes, que siempre podemos resolver explícitamente. Para encontrar y solo tenemos que deshacer después el cambio de variables (es decir, usar que $y(t) = z(\log t)$).

Caso general En el caso general de la ecuación (79) no merece la pena escribir la ecuación que se obtiene finalmente al hacer el cambio, y es mejor verlo en cada ejemplo. Lo importante del método es que la ecuación que se obtiene con el cambio es siempre lineal con coeficientes constantes, y puede resolverse con el método de la Sección 5.6.1. Si quieres una demostración de que siempre obtenemos una ecuación de este tipo puedes probar lo siguiente, por ejemplo por inducción:

Ejercicio 5.6. Sea $I \subseteq (0, +\infty)$ un intervalo, $y \colon I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable. Definimos

$$z(s) := y(e^s),$$

para todo s tal que $e^s \in I$. Dado un entero $m \geq 0$, demuestra que $y^{(m)}(t)$ es de la forma

$$y^{(m)}(t) = \frac{1}{t^m} \sum_{j=0}^{m} b_j z^{(j)}(\log t),$$

para ciertos coeficientes $b_0, \ldots, b_m$ (que dependen de m).

Como consecuencia del método anterior y del Teorema 5.2 es fácil obtener el siguiente resultado:

Teorema 5.23. *Sea $n \geq 1$ un entero, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ números reales. Las soluciones maximales de la ecuación (79) (definida en el dominio (80)) están siempre definidas en $(0, +\infty)$ o en $(-\infty, 0)$.*

Ejemplo 5.24. *Encuentra un sistema fundamental de soluciones de la ecuación*

$$t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$$

5.9. Ejercicios

Ejercicio 5.7. Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$t^2x'' + tx' - x = 4t^2e^t. \tag{82}$$

1. Describe los dominios de la ecuación (82).
2. Comprueba que $\varphi_1(t) = t$ (definida en un intervalo maximal a determinar) es solución de la ecuación homogénea asociada a (82).
3. Aplicando el método de reducción de orden, calcula otra solución $\varphi_2(t)$ de la ecuación homogénea asociada a (82) y que sea linealmente independiente con $\varphi_1(t)$.
4. Aplicando variación de constantes, halla una solución particular $\phi(t)$ de (82).
5. Calcula todas las soluciones de (82).

En los apartados 2, 3, 4 y 5, indica explícitamente los dominios de cada una de las soluciones halladas.

Ejercicio 5.8. (Septiembre 2013) Se considera la ecuación diferencial

$$(t\ln(t))^2x''(t) - 2(t\ln(t))x'(t) + (2 + \ln(t))x(t) = 0. \tag{83}$$

1. Comprueba que $x(t) = \ln(t)$, $\forall t > 1$, es una solución de (83).
2. Empleando el método de reducción de orden, calcula un sistema fundamental de soluciones de (83), indicando explícitamente el dominio maximal de definición de las funciones que lo compongan.

Ejercicio 5.9. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

1. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$.
2. $2x''' - 10x'' + 16x' - 8x = 0$.
3. $6x''' + 6x' = 0$.
4. $x'' + 4x = 0$.

Ejercicio 5.10. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes sin emplear el método de variación de constantes.

1. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^t$ (buscando una solución particular exponencial).
2. $2x''' - 10x'' + 16x' - 8x = \cos(t)$ (buscando una solución particular trigonométrica).
3. $6x''' + 6x' = 2$ (buscando una solución particular polinómica).
4. $x'' + 4x = e^t + \operatorname{sen}(2t) + t^2$.

Ejercicio 5.11. (Septiembre 2012) Sea la ecuación diferencial $x'' - 4x = e^{2t} + \cos(2t)$.

1. Calcula un sistema fundamental para la ecuación homogénea asociada.
2. Halla la solución de la ecuación propuesta para la que $x(0) = x'(0) = 0$.

Ejercicio 5.12. Resuelve el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + 16x = \cos(\omega t), \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 0, \end{cases}$$

donde ω es un número real no negativo. ¿Qué ocurre cuando $\omega = 4$?

Ejercicio 5.13. Resuelve los problemas de valores iniciales

$$a) \begin{cases} x'' + 16x = \cos(4{,}2\,t), \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 0. \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x'' + 16x = \cos(4{,}2\,t), \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Compara la soluciones obtenidas con la función $x(t) = \frac{\operatorname{sen}(0{,}1\,t)}{0{,}82}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5.14. Resuelve la ecuación diferencial $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, donde β, ω_0 y ω son números reales no negativos y E_0 es una constante real.

Ejercicio 5.15. En un circuito RLC simple la evolución de la corriente $i(t)$ está determinada por la ecuación

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) = E'(t), \tag{84}$$

donde $E(t)$ es el voltaje externo y R, L, C son parámetros reales no negativos.

1. Haciendo uso de la ecuación asociada a la carga $q(t)$, halla las condiciones iniciales para la ecuación (84) supuesto que se conoce la carga inicial (q_0) y la corriente inicial (i_0).
2. Supongamos que $C = 1\,\mathrm{F}$, $R = 30\,\Omega$, $L = 7\,\mathrm{H}$ y que la carga y la corriente iniciales en el condensador son nulas. Por último, aplicamos al circuito un voltaje constante de 240 voltios y lo cerramos en el instante $t = 0$. Halla la carga en el condensador para $t > 0$.
3. Repite el apartado anterior para los valores $C = 2\,\mathrm{F}$, $R = 3 \cdot 10^5\,\Omega$ y $L = 7\,\mathrm{H}$.

Ejercicio 5.16. Considera la ecuación para la carga $q(t)$ referida en el ejercicio anterior. Supongamos que el voltaje viene dado por la función $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ (siendo ω una constante positiva).

1. Comprueba que la carga del condensador no está acotada si $R = 0$ y $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2. Comprueba que la carga estará acotada si la resistencia es no nula (es decir, $R \neq 0$).

Ejercicio 5.17 (Carga y descarga de condensadores)**.** Sea un circuito RC con tensión constante E_0 y el condensador completamente cargado.

1. Un fallo eléctrico provoca que la tensión se anule. Tomando como $t = 0$ el instante en que se produce dicho fallo, determina la función que representa la descarga del condensador.

2. Descargado completamente el condensador, se detecta y arregla el fallo. Tomando como $t = 48$ el instante en que se reactiva el circuito, determina la función que representa la carga del condensador.

Ejercicio 5.18. (Julio 2014) Se considera la ecuación diferencial

$$t^2 x'(t) + 5x(t) = e^{(t^{-1})}. \tag{85}$$

1. Determina los posibles dominios maximales de (85).

2. Fijada una condición inicial $x(t_0) = x_0$ cualquiera, ¿existe una única solución de la ecuación (85)? Justifica adecuadamente tu respuesta.

3. Comprueba que, mediante el cambio de variables $s = \frac{1}{t}$, la ecuación (85) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

4. Calcula <u>todas</u> las soluciones de la ecuación (85). (Puedes hacerlo directamente o usando la ecuación obtenida en el apartado anterior.)

5. Halla, si es posible, la solución de (85) que satisface la condición inicial $x(-2) = 0$.

Ejercicio 5.19. Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t^2 x''(t) - t x'(t) + x(t) = \ln(t^2), \\ x(-1) = 0, \ x'(-1) = 0. \end{cases} \tag{86}$$

1. Comprueba que, aplicando el cambio de variable $t = -e^s$ a la ecuación del problema (86), se obtiene una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

2. Resuelve la ecuación del problema de valores iniciales (86) usando el cambio de variable dado en el apartado a).

3. Resuelve el problema de valores iniciales (86). Debes indicar el intervalo de definición maximal de la solución obtenida.

Ejercicio 5.20. (Junio 2012) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t^5 x''(t) + 2t^3(t+1)x'(t) + t x(t) = 1, \\ x(-1) = 1, \ x'(-1) = -2. \end{cases} \tag{87}$$

1. Comprueba que, aplicando el cambio de variable $t = s^{-1}$ a la ecuación del problema (87), se obtiene una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

2. Resuelve la ecuación del problema de valores iniciales (87) usando el cambio de variable dado en el apartado a).

3. Resuelve el problema de valores iniciales (87). Debes indicar el intervalo de definición maximal de la solución obtenida.

Ejercicio 5.21. (Septiembre 2014) Se considera la ecuación diferencial

$$t^2x''(t) + (4t^2 - 4t)x'(t) + (4t^2 - 8t + 6)x(t) = 0. \tag{88}$$

1. Determina los posibles dominios maximales de (88).

2. Comprueba que, mediante el cambio de variable $y = \dfrac{x}{t^2}$, la ecuación (88) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

3. Calcula <u>todas</u> las soluciones de la ecuación (88) usando la ecuación obtenida en el apartado anterior.

4. Halla, si es posible, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t^2x''(t) + (4t^2 - 4t)x'(t) + (4t^2 - 8t + 6)x(t) = 0 \\ x(-1) = 0, \ x'(-1) = 3. \end{cases}$$

6. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es simplemente una lista de ecuaciones ordinarias con m incógnitas en la que cada ecuación puede depender de todas las incógnitas. Normalmente consideramos ecuaciones dadas en forma normal, es decir, con la derivada de orden mayor despejada:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = f_1(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ \quad\vdots \\ y_m^{(n)} = f_m(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \end{cases} \tag{89}$$

donde denotamos $y \equiv (y_1, \dots, y_m)$ para acortar la notación, y por supuesto $y^{(j)} \equiv (y_1^{(j)}, \dots, y_m^{(j)})$. Al igual que en el caso de las ecuaciones individuales, decimos que n es el orden de la ecuación. Aquí $f_1, \dots, f_m$ son funciones reales definidas en un dominio apropiado. Una observación fundamental es que cualquier sistema de orden $n > 1$ puede reescribirse como un sistema de orden 1 aumentando el número de incógnitas: si llamamos

$$z_{i,j} := y_i^{(j)} \qquad \text{para } i = 1, \dots, m;\ j = 0, \dots, n-1, \tag{90}$$

y denotamos $z_j := (z_{1,j}, \dots, z_{m,j}) = y^{(j)}$ para $j = 0, \dots, n-1$ entonces el sistema (89) es equivalente a

$$\begin{cases} z'_{i,j} = z_{i,j+1}, & i = 1, \dots, m;\ j = 0, \dots, n-1, \\ z'_{i,n} = f_i(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) & i = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{91}$$

Esto es un sistema con $m \times n$ ecuaciones, todas de primer orden. Por este motivo normalmente en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales se simplifica restringiéndolo a los sistemas de primer orden; al fin y al cabo, todo los sistemas pueden reescribirse así con el coste de aumentar el número de ecuaciones. Por este motivo nosotros sólo estudiaremos los sistemas de primer orden.

Sistemas lineales. Forma matricial. Un sistema de EDOs lineal de primer orden es un sistema de ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} y'_1 = a_{1,1}(t)y_1 + a_{1,2}(t)y_2 + \dots + a_{1,n}(t)y_n + b_1(t), \\ \quad \vdots \\ y'_n = a_{n,1}(t)y_1 + a_{n,2}(t)y_2 + \dots + a_{n,n}(t)y_n + b_n(t), \end{cases} \tag{92}$$

donde los coeficientes b, $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ son funciones continuas definidas en cierto intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Recordamos que un sistema de orden n puede siempre reducirse a un sistema de orden 1 (al precio de aumentar el número de ecuaciones), así que sólo estudiamos sistemas de primer orden. De la misma forma que en el caso de una sola ecuación, estos sistemas siempre tienen solución única, definida en todo I, una vez que especificamos n condiciones iniciales:

Teorema 6.1. *Sea $n \geq 1$, y sean $a_{i,j} \colon I \to \mathbb{R}$, para $i, j = 1, \dots, n$, funciones continuas definidas en cierto intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Dados $t_0 \in I$, $y_1^0, \dots, y_n^0 \in \mathbb{R}$, el sistema (92) tiene una única solución maximal que cumple las n condiciones*

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t_0) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_n^0.$$

Dicha solución maximal está definida en todo I.

Aunque sean lineales, los sistemas del tipo (92) no tienen en general soluciones explícitas. Nos vamos a centrar en un tipo particular que sí las tiene: los sistemas con coeficientes constantes. Son sistemas del tipo

$$\begin{cases} y'_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,n}y_n + b(t), \\ \quad \vdots \\ y'_n = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{n,n}y_n + b(t), \end{cases} \tag{93}$$

donde los coeficientes $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ son números reales, y $b \colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo abierto i. Estos sistemas son el análogo de las ecuaciones con coeficientes constantes que vimos en la sección 5.6, y siempre tienen solución explícita en términos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos.

Ejemplo 6.2.

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo 6.3.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}\right\}$$

De la misma forma que escribimos un sistema lineal en $\mathbb{R}^n$ en forma matricial, hay una forma más cómoda de escribir el sistema (93) (y también (92)): si llamamos A a la matriz $n \times n$ cuyas entrada (i, j) (fila i, columna j) es $a_{i,j}$,

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

y denotamos

$$\mathbf{y} \equiv (y_1, \dots, y_n)^\top, \qquad \mathbf{b}(t) \equiv (b_1(t), \dots, b_n(t))^\top,$$

entonces podemos escribir (93) como

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}.$$

Ponemos $(\cdot)^\top$ en la definición de y, b para destacar que los entendemos como vectores columna.

Estructura del espacio de soluciones De la misma forma que en el caso de una sola ecuación, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones del tipo (92) tiene también estructura de espacio afín.

6.1. La ecuación homogénea

Consideramos la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes dada por

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{94}$$

donde $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ es la matriz de coeficientes, y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es la incógnita.

Para resolver la ecuación homogénea seguimos la misma idea que en el caso de una ecuación individual. Vamos a empezar por buscar soluciones del tipo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t},$$

donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es cierto vector. Sustituyendo en (94), debe ocurrir que

$$\lambda\mathbf{v}e^{\lambda t} = A\mathbf{v}e^{\lambda t},$$

es decir,

$$\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}.$$

Esto nos dice que v (si no es nulo) debe ser un vector propio de la matriz A, con valor propio λ. Como sabemos que es suficiente encontrar n soluciones linealmente independientes, hay un caso en el que esto nos permite resolver completamente el sistema (94):

Lema 6.4. *Supongamos que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable, y sea $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$ una base de vectores propios con valores propios asociados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (posiblemente repetidos). Suponemos que los vectores propios v_i asociados a los valores propios reales tienen entradas reales. Podemos obtener un sistema fundamental de soluciones de (94) de la siguiente forma: por cada vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a un valor propio real λ_i, añadimos la solución*

$$\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t},$$

y por cada pareja $(\lambda_i, \overline{\lambda}_i)$ de valores propios complejos añadimos las soluciones

$$\Re(\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}), \qquad \Im(\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}).$$

La lista de funciones resultante es un sistema fundamental de (94).

Ejercicio 6.1. Demuestra que para cualquier matriz (diagonalizable) A, las funciones que forman el sistema fundamental en el lema anterior son linealmente independientes.

Vemos que para resolver el sistema (94) es importante buscar los valores y vectores propios de la matriz A. Los valores propios son, como sabemos, las raíces del *polinomio característico*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Ejercicio 6.2. Consideramos la ecuación de orden n con coeficientes constantes dada por

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0, \tag{95}$$

donde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Esta ecuación tiene un polinomio característico asociado, como definimos en la sección 5.6.1. Comprueba que si transformas esta ecuación en un sistema equivalente de primer orden y calculas el polinomio característico de la matriz asociada a este sistema, obtienes el mismo polinomio. Esto nos dice que aunque estamos llamando con el mismo nombre ("polinomio característico") a dos cosas distintas, hay una equivalencia natural entre ellas.

Ejemplo 6.5.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo 6.6.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned}\right\}$$

Nos queda un caso que resolver: aquel en que la matriz A no es diagonalizable. Este caso es más complicado y no vamos a dar una forma práctica de resolverlo en general. Sí vamos a resolver completamente los sistemas 2×2, y muchos de los sistemas 3×3, y dar una forma algo teórica de escribir la solución. Para hacer esto necesitamos estudiar la exponencial de una matriz

6.1.1. Exponencial de una matriz

La exponencial usual e^a, para $a \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{C}$) puede extenderse a las matrices cuadradas de forma natural:

Definición 6.7. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz cuadrada, definimos la *exponencial de A* como

$$e^A := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}. \tag{96}$$

Ejercicio 6.3. Por supuesto, para que esta definición sea correcta tenemos que demostrar que esta suma converge; es decir, que cada una de las entradas de la suma converge. Para hacerlo puedes seguir las siguientes indicaciones:

1. Definimos la *norma* de una matriz $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ como

   $$\|A\| := \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

   Demuestra que si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son dos matrices, entonces

   $$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

2. Demuestra que si (A_n) es una sucesión de matrices tal que $\|A_n\| \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces cada una de las entradas de la matriz A_n tiende a 0 cuando $n \to +\infty$.

3. Demuestra que la serie

   $$\sum_{i\geq 0} \frac{\|A^i\|}{i!}$$

   es convergente.

4. Deduce que la serie (96) es convergente (es decir, que cada una de sus entradas converge).

Vamos a demostrar de manera formal que la expresión e^{At} es una solución (matricial) del sistema (94) (es decir, que cada una de sus columnas es una solución).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i t^{i-1} A^i}{i!}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1} A^i}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^{i+1}}{i!} = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!} = Ae^{tA}.$$

Esto nos dice que hemos encontrado una forma de escribir la solución general de la ecuación (94): su solución general es

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{f}_1(t) + \cdots + C_n \mathbf{f}_n(t),$$

donde $\mathbf{f}_1(t), \dots, \mathbf{f}_n(t)$ son las columnas de la matriz e^{At}. Sabiendo que $e^{0A} = e^0 = 1$ (ver Lema 6.10), es fácil ver lo siguiente:

Teorema 6.8. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada cualquiera. La solución del sistema* (95) *sujeto a la condición*

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x^0}$$

es

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x^0}.$$

Por supuesto, el Lema 6.4 se puede obtener como un caso particular de este resultado (esto se explica con más detalle en la Sección 6.1.2).

Lo que nos queda por hacer es dar una forma práctica de calcular e^{At} para una matriz A, ya que la suma (96) no nos da un método de cálculo fácil. En realidad, el Teorema 6.8 nos dice que calcular la exponencial de la matriz A y resolver el sistema lineal $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ son en realidad el mismo problema. Así que cuando ya sabemos resolver la ecuación es fácil calcular e^A usando el siguiente resultado:

Corolario 6.9. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada cualquiera. La columna i de la matriz e^{tA} es la solución del problema de valores iniciales*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} \\ x(0) &= \mathbf{e}_i, \end{aligned}\right\}$$

donde $\mathbf{e}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ es el vector i de la base usual (que tiene un 1 en la coordenada i, y tiene 0 en las demás).

Algunas propiedades de la exponencial de una matriz

Lema 6.10. *Si $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denota la matriz con todas las entradas igual a 0,*

$$e^{\mathbf{0}} = I.$$

Lema 6.11. *Si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices cuadradas que conmutan ($AB = BA$) entonces*

1. *e^A, B conmutan (y e^B, A también)*
2. *Se cumple*
$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Observación 6.12. Como caso particular del punto 1, las matrices e^A y A siempre conmutan.

Demostración del Lema 6.11. La primera parte se puede deducir de la expresión de e^A, usando que si A y B conmutan entonces A^n y B también conmutan.

Para la segunda parte, vamos a demostrar que

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

lo cual demuestra en particular lo que queremos para $t = 1$. Derivando en los dos miembros,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{(A+B)t} = (A+B)e^{(A+B)t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{At}e^{Bt}\right) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt},$$

donde hemos usado el punto 1. Por tanto las columnas de $e^{(A+B)t}$ y las de $e^{At}e^{Bt}$ son soluciones de la misma ecuación diferencial. Además, tienen la misma condición inicial porque

$$e^{(A+B)\cdot 0} = e^{A\cdot 0}e^{B\cdot 0} = I$$

(usando el Lema 6.10). Por el Teorema de unicidad de solución de una ecuación lineal, todas las columnas deben ser iguales entre sí:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Lema 6.13. *Dada cualquier matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la exponencial e^A es una matriz invertible, con inversa e^{-A}.*

Demostración. Usando los lemas anteriores,

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = 1,$$

y lo mismo ocurre para $e^{-A}e^A$. $\square$

6.1.2. Cálculo de la exponencial

Para convertir el Teorema 6.8 en un resultado práctico tenemos que encontrar una forma de calcular e^{At} explícitamente. Como dice el Corolario 6.9, sabemos hacerlo cuando ya sabemos resolver el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, pero por supuesto tenemos que aprender a calcular e^{At} en los casos en los que *no sabemos* resolver el sistema.

Ejercicio 6.4. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, con diagonal $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, demuestra que

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.5. Si A es una matriz diagonalizable, demuestra que e^A es también diagonalizable.

Ejercicio 6.6. Demuestra el Lema 6.4 usando el Teorema 6.8.

Vamos a centrarnos en encontrar soluciones del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ a partir de la matriz A, usando la exponencial de A. La estrategia básica es la que vimos justo antes del Lema 6.4:

Lema 6.14. *Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de la matriz A asociado a un valor propio λ, entonces $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ es una solución del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.*

Hay otro caso en que $e^{At}\mathbf{v}$ no es difícil de calcular:

Lema 6.15. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\mathbf{v}$ es un vector tal que $(A - \lambda I)^2\mathbf{v} = 0$, entonces*

$$e^{tA}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v} + te^{\lambda t}(A - \lambda I)\mathbf{v}$$

es una solución del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Demostración. Usando la serie (96) podemos ver que la expresión de $e^{tA}\mathbf{v}$ es efectivamente la dada, y por el Teorema 6.8 sabemos que esto es una solución del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. $\square$

Ejercicio 6.7.

1. Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ son linealmente independientes y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son cualesquiera, demuestra que las funciones
$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{y}(t) = e^{\mu t}\mathbf{w} + te^{\mu t}(A - \mu I)\mathbf{w}$$
son linealmente independientes.

2. Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ son linealmente independientes y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son cualesquiera, demuestra que las funciones
$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} + te^{\lambda t}(A - \lambda I)\mathbf{v}, \qquad \mathbf{y}(t) = e^{\mu t}\mathbf{w} + te^{\mu t}(A - \mu I)\mathbf{w}$$
son linealmente independientes.

Esto significa que si podemos encontrar vectores $\mathbf{v}$ tales que $(A - \lambda I)^2\mathbf{v} = 0$, obtenemos nuevas soluciones del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, independientes de las que habíamos encontrado antes. (No hemos demostrado que cuando tomamos la lista de *todas las posibles* que encontramos de esta forma, asociadas a vectores linealmente independientes, esa lista sea linealmente independiente, pero no es difícil hacerlo.)

Si podemos encontrar una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores para los que sabemos calcular $e^{tA}\mathbf{v}_i$, entonces esto es suficiente para encontrar un sistema fundamental de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. De hecho, si
$$P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$
es la matriz que resulta al poner los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ por columnas, es suficiente invertir P para encontrar e^{tA}. Con los Lemas 6.14 y 6.15, encontrar una base de $\mathbb{R}^d$ formada por vectores $\mathbf{v}$ tales que $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ o bien $(A - \lambda I)^2\mathbf{v} = 0$ es suficiente entonces para tener un sistema fundamental de soluciones y calcular e^{At}. En general, hay un resultado conocido como *Teorema de Jordan* que dice que siempre existe una base de $\mathbb{C}^d$ formada por vectores $\mathbf{v}$ tales que $(A - \lambda I)^k\mathbf{v} = 0$ para ciertos $k \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Una extensión de los argumentos anteriores nos permite entonces resolver el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en todos los casos, pero no lo vamos a ver con toda generalidad.

6.2. La ecuación completa

De la misma forma que en el caso de ecuaciones individuales, para resolver el sistema completo
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{97}$$
es suficiente con encontrar una solución particular.

6.2.1. Método de variación de constantes

Por el Teorema 6.8 sabemos que la solución general del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{v}$, para cierto $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Al igual que en el caso de una sola ecuación individual, el método de variación de constantes consiste en buscar una solución de (97) de la forma
$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{c}(t),$$

para cierta función (vectorial) $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Sustituyendo en (97),

$$Ae^{At}\mathbf{c}(t) + e^{At}\mathbf{c}'(t) = Ae^{At}\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t),$$

es decir,

$$e^{At}\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t),$$

lo cual da (usando que la inversa de e^{At} es e^{-At}; ver Lema 6.13)

$$\mathbf{c}'(t) = e^{-At}\mathbf{b}(t),$$

así que podemos elegir

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^t e^{-As}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Se puede comprobar que efectivamente la expresión

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s$$

da una solución particular del sistema (97).

6.2.2. Método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados funciona exactamente igual que en el caso de una sola ecuación (sección 5.6.2), con la diferencia de que hay que usar constantes distintas para cada una de las componentes de la incógnita $\mathbf{y}$ (las constantes que aparecen en $y_1, y_2, \dots, y_n$ deben ser distintas).

6.3. Ejercicios

Ejercicio 6.8. (Julio 2012) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 9x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases} \tag{98}$$

1. Resuelve (98) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente.

2. Calcula la solución de (98) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(0) = (1, 1)$.

Ejercicio 6.9. (Julio 2013) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4\,x_2(t), \\ x_2'(t) = -\,x_1(t). \end{cases} \tag{99}$$

1. Sin hacer uso de la transformada de Laplace y sin pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula un sistema fundamental de soluciones de (99) formado por funciones reales de variable real.

2. Calcula la solución de (99) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(\pi) = (3, 2)$.

Ejercicio 6.10. (Septiembre 2013) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) + 3e^{2t}, \\ x_2'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) - 3e^{2t}. \end{cases} \tag{100}$$

1. Resuelve (100) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente.

2. Calcula la solución de (100) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(0) = (3, 0)$.

Ejercicio 6.11. (Julio 2014) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) - 2x_2(t) + e^{2t}, \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) + 4. \end{cases} \tag{101}$$

1. Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula todas las soluciones reales de (101).

2. Halla todas las soluciones de (101) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.12. (Septiembre 2014) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) - 3, \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) - 2. \end{cases} \tag{102}$$

1. Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula todas las soluciones reales de (102).

2. Halla todas las soluciones de (102) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.13. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

$$a) \begin{cases} x_1' = 12x_1 - 11x_2 - 23x_3 \\ x_2' = 9x_1 - 8x_2 - 17x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 - 7x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

En ambos casos, ¿qué solución satisface la condición inicial $(x_1, x_2, x_3)(0) = (1, 0, -1)$?

Ejercicio 6.14. 1. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - 6x_3(t), \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 6x_3(t), \\ x_3'(t) = 6x_1(t) + 2x_2(t) - 9x_3(t). \end{cases} \tag{103}$$

Resuelve (103) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente.

2. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - 6x_3(t) + 2\cos(t), \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 6x_3(t) - 2\operatorname{sen}(t), \\ x_3'(t) = 6x_1(t) + 2x_2(t) - 9x_3(t) + 2\operatorname{sen}(t). \end{cases} \tag{104}$$

   Resuelve (104) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, o sea, hallando una adecuada solución particular que combine senos y cosenos.

3. Cálcula la solución de (104) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2, x_3)(0) = (2, 3, 2)$.

4. ¿Qué puedes comentar sobre la solución obtenida en el apartado anterior para valores de t suficientemente grandes?

Ejercicio 6.15. Las solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = 5\,x_1(t) - 3\,x_2(t), \end{cases}$$

es ...

1. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

4. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 6.16. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2\,x_1(t) - 3\,x_2(t), \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) + 4\,x_2(t) \end{cases}$$

que satisface la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es ...

1. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

4. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 6.17. Una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) - 2\,e^t \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 4\,e^t \end{cases}$$

es ...

1. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + e^t \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 3\,e^t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
2. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + e^t \\ \operatorname{sen}(t) - \cos(t) + 3\,e^t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
3. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + 3\,e^t \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) + e^t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
4. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

7. Soluciones a algunos de los ejercicios

7.1. Soluciones de la Sección 1.3

7.1.1. Solución al Ejercicio 1.7

La cantidad $y(t)$ de material en tiempo t viene dada por la solución a la ecuación diferencial que se plantea:

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t},$$

donde $y_0 > 0$ es la cantidad inicial de material. Si después de la vida media t_2 ocurre que $y(t_2) = y_0/2$,

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{-\lambda t_2}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_2},$$

luego

$$t_2 = \frac{\log 2}{\lambda} \quad \text{o equivalentemente} \quad \lambda = \frac{\log 2}{t_2}$$

7.1.2. Solución al Ejercicio 1.8

La ecuación que rige la cantidad $y(t)$ de uranio-238 en tiempo t es

$$y' = -\lambda y,$$

donde $\lambda = \log 2/t_2 = \log 2/(4.468 \times 10^9\,\mathrm{a}) = 0.155 \times 10^{-9}\,\mathrm{a}^{-1} = 4.25 \times 10^{-13}\,\mathrm{d}^{-1}$. (a es la abreviatura de "año" y d la de "día"). La solución es

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t},$$

donde y_0 es la cantidad inicial de uranio-238. Sustituyendo para $t = 1\,\mathrm{d}$,

$$y(1) = 1\,\mathrm{kg} \cdot \exp(-4.25 \times 10^{-13}).$$

Éste es un número extremadamente cercano a 1. Podemos aproximar con mucha exactitud la cantidad de uranio-238 que ha decaído por

$$1\,\mathrm{kg} - y(1) = (1 - \exp(-4.25 \times 10^{-13}))\mathrm{kg} \approx 4.25 \times 10^{-13}\,\mathrm{kg}.$$

Cada gramo de uranio-238 contiene aproximadamente $A/238$ átomos, donde $A = 6.022 \times 10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$ es la constante de Avogadro. Por tanto, el número de átomos que han decaído después de un día es:

$$4.25 \times 10^{-10}\,\mathrm{g} \cdot \frac{6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{238\,\mathrm{g\,mol}^{-1}} = 0.108 \times 10^{13}.$$

Cada vez que un átomo de uranio-238 decae en Torio-234 se liberan 4.269 MeV, lo cual da un total de

$$0.108 \times 10^{13} \cdot 4.269\,\mathrm{MeV} = 0.459 \times 10^{13}\,\mathrm{MeV} = 0.459 \times 10^{19}\,\mathrm{eV}.$$

Dado en julios la cantidad es

$$(0.459 \times 10^{19}\,\mathrm{eV}) \cdot (1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J\,eV}^{-1}) = 0.736\,\mathrm{J}.$$

El efecto de la radiación en humanos se mide en *sieverts*, y se calcula dividiendo la energía total de la radiación por el peso de la persona que la ha recibido, y multiplicando por un *factor corrector* que depende del tipo de radiación. En el caso de las partículas alfa emitidas por el uranio-238 el factor de corrección es 20, así que para una persona de 70 kg obtendríamos una dosis equivalente de radiación de

$$20 \cdot 0.736\,\mathrm{J}/70\,\mathrm{kg} = 0.21\,\mathrm{Sv} = 210\,\mathrm{mSv}.$$

Puedes comprobar en tablas de ejemplos de dosis de radiación que es una dosis de radiación comparable a la recibida si pasas seis meses en el espacio; es aproximadamente la mitad de la dosis máxima que se permite que reciba un trabajador a lo largo de un año según regulaciones de seguridad.

En este ejercicio sólo hemos tenido en cuenta *la primera* de las reacciones que sufre el uranio-238 cuando decae; hay una cadena de varias reacciones, cada una de las cuales emite energía de alguna forma. El modelo para incluir también estas reacciones es más complicado e involucra un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

7.2. Soluciones de la Sección 6.3

7.2.1. Solución al Ejercicio 6.8

1. Los valores propios de la matriz A asociada al sistema son $\lambda = 1$, con multiplicidad doble. Un vector propio asociado a $\lambda = 1$ es $(-3, 1)$, luego una solución del sistema es

   $$x_1(t) = -3e^t, \qquad x_2(t) = e^t.$$

   El espacio de vectores propios asociado a $\lambda = 1$ tiene dimensión 1, por lo que tenemos que buscar otras soluciones. Buscamos un vector w tal que

   $$(A - I)w \neq 0, \qquad (A - I)^2 w = 0. \tag{105}$$

Comprobamos que $(A-I)^2 = 0$, con lo que $w = (1,0)$ es un vector que cumple (105). Esto nos da la solución

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t(I + t(A-I))w = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(1+3t) \\ -te^t \end{pmatrix}. \tag{106}$$

Por tanto la solución general del sistema es

$$x_1(t) = -3C_1e^t + C_2e^t(1+3t), \qquad x_2(t) = C_1e^t - C_2te^t \tag{107}$$

2. A la vista de (107) tenemos

$$x_1(0) = -3C_1 + C_2, \qquad x_2(0) = C_1. \tag{108}$$

Para tener $x_1(0) = 1 = x_2(0)$ debemos elegir entonces $C_1 = 1$, $C_2 = 4$. La solución que buscamos es

$$x_1(t) = -3e^t + 4e^t(1+3t) = e^t + 12te^t, \qquad x_2(t) = e^t - 4te^t. \tag{109}$$