Relación de ejercicios 2

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

24 de febrero de 2017

Ejercicio 2.1. Resuelve la ecuación diferencial

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde r, K son parámetros reales estrictamente positivos. Además, supuesto $r = 1$ y $K = 6$, determina las soluciones que satisfacen las siguientes condiciones iniciales.

1. $x(2) = -1$; *b*) $x(2) = 4$; *c*) $x(2) = 7$.

Ejercicio 2.2. Considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = x + t^2 - 2t - 2. \tag{1}$$

1. Comprueba que $x_p(t) = -t^2 + 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución particular de (1).
2. Aplica el cambio $x = y + x_p(t)$ para resolver (1).
3. Determina la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(1) = 0$.
4. Determina la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(1) = 1$.

Ejercicio 2.3. Considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = x\,\mathrm{tg}(t) + 2 \tag{2}$$

1. Resuelve la ecuación diferencial en variables separadas $x' = x\,\mathrm{tg}(t)$.
2. Aplica el cambio $x = y\frac{1}{\cos(t)}$ para resolver (2).
3. ¿Encuentras alguna relación entre los apartados 1 y 2?

Ejercicio 2.4. Sea el problema de valores iniciales

$$x' = 3\frac{t}{x} + \frac{x}{t}, \quad x(1) = -2.$$

1. Resuelve el problema propuesto. (Sugerencia: usa el cambio de variables $x = ut$.)
2. ¿Cuál es el intervalo maximal de definición de la solución hallada?

Ejercicio 2.5. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 2\,x - 3\,\frac{t}{x}\,. \tag{3}$$

1. Determina los posibles dominios maximales de (3).
2. Resuelve (3) empleando el cambio de variable $u = x^2$.
3. Determina la solución de (3) que satisface la condición inicial $x(0) = 1$, indicando el intervalo maximal donde está definida (de la forma más precisa posible).

Ejercicio 2.6. Resuelve la ecuación diferencial $(t^2 e^{-x/t} + x^2)\,\mathrm{d}t = tx\,\mathrm{d}x$.

Ejercicio 2.7. Indica la(s) opción(es) correcta(s) en cada una de las siguientes preguntas o afirmaciones.

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son de variables separadas?

   a) $x' = \sqrt{xt}\,$. *b*) $x' = e^{xt}$. *c*) $x' = \cos{(xt)}$.

   d) $x' = \sqrt{x+t}\,$. *e*) $x' = e^{x+t}$. *f*) $x' = \cos{(x+t)}$.

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas?

   a) $x' = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-t^2}{xt}\right)$. *b*) $x' = e^{x/t}$. *c*) $x' = \frac{x+t^2}{t+x^2}$.

   d) $x' = \sqrt{x+t}\,$. *e*) $x' = \frac{e^x}{e^t}$. *f*) $x' = \frac{t}{x} + \frac{x^2}{t^2}$.

3. Si en la ecuación diferencial $x' = \frac{x}{t}$ hacemos el cambio $y = \frac{x}{t}$ entonces obtenemos la ecuación ...

   a) $y' = y$. *b*) $y' = \frac{y}{t}$.

   c) $y' = 0$. *d*) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Si en la ecuación diferencial $x' = 2\operatorname{sen}(4x+8t+16)$ hacemos el cambio $y = 4x+8t+16$ entonces obtenemos la ecuación ...

a) $y' = 4\cos(y)$. *b*) $y' = 8\cos(y)$. *c*) $y' = 8(\cos(y)+1)$.

d) $y' = 4\,\mathrm{sen}(y)$. *e*) $y' = 8\,\mathrm{sen}(y)$. *f*) $y' = 8(\mathrm{sen}(y)+1)$.

5. Sea la ecuación diferencial $x''(t)+x'(t)+2x(t) = \frac{(x'(t))^2}{2x(t)}$. El cambio de variable $x = y^2$ da lugar a la ecuación ...

   a) $y(t)(1+y(t)) = 0$. *b*) $y''(t)+y'(t)+y(t) = 0$.

   c) $y''(t)+y'(t)+y^2(t) = \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2$. *d*) Ninguna de las anteriores.

6. La solución del problema de valores iniciales

$$x'(t) = x(t)\,e^t,\ x(1) = 0,$$

   es ...

   a) $x(t) = e^{t-1},\ \forall t > 0$. *b*) $x(t) = 0,\ \forall t \geq 0$.

   c) El problema no tiene solución. *d*) Ninguna de las anteriores.

7. La solución del problema de valores iniciales

$$x'(t) = x^2(t),\ x(0) = \frac{1}{3},$$

   es ...

   a) $x(t) = \frac{1}{3-t},\ \forall t \in]3,\infty[$. *b*) $x(t) = \frac{1}{3+t},\ \forall t \in]-3,\infty[$.

   c) $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{t},\ \forall t \in]0,\infty[$. *d*) Ninguna de las anteriores.

8. La función $x(t) = t + a,\ \forall t \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferencial

$$x' = (t-1)^3 - 3(t-1)^2 x + 3(t-1)x^2 - x^3$$

   si ...

   a) $a = -2$ b) $a = -1$ c) $a = 0$

   d) $a = 1$ e) $a = 2$ f) Ninguna de las anteriores.