Relación de ejercicios 3

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

20 de marzo de 2017

Ejercicio 3.1. Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$t^2x'' + tx' - x = 4t^2e^t. \tag{1}$$

1. Describe los dominios de la ecuación (1).
2. Comprueba que $\varphi_1(t) = t$ (definida en un intervalo maximal a determinar) es solución de la ecuación homogénea asociada a (1).
3. Aplicando el método de reducción de orden, calcula otra solución $\varphi_2(t)$ de la ecuación homogénea asociada a (1) y que sea linealmente independiente con $\varphi_1(t)$.
4. Aplicando variación de constantes, halla una solución particular $\phi(t)$ de (1).
5. Calcula todas las soluciones de (1).

En los apartados b), c), d) y e), indica explícitamente los dominios de cada una de las soluciones halladas.

Ejercicio 3.2. (Septiembre 2013) Se considera la ecuación diferencial

$$(t\ln(t))^2x''(t) - 2(t\ln(t))x'(t) + (2 + \ln(t))x(t) = 0. \tag{2}$$

1. Comprueba que $x(t) = \ln(t)$, $\forall t > 1$, es una solución de (2).
2. Empleando el método de reducción de orden, calcula un sistema fundamental de soluciones de (2), indicando explícitamente el dominio maximal de definición de las funciones que lo compongan.

Ejercicio 3.3. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

1. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$.
2. $2x''' - 10x'' + 16x' - 8x = 0$.
3. $6x''' + 6x' = 0$.
4. $x'' + 4x = 0$.

Ejercicio 3.4. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes sin emplear el método de variación de constantes.

1. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^t$ (buscando una solución particular exponencial).
2. $2x''' - 10x'' + 16x' - 8x = \cos(t)$ (buscando una solución particular trigonométrica).
3. $6x''' + 6x' = 2$ (buscando una solución particular polinómica).
4. $x'' + 4x = e^t + \operatorname{sen}(2t) + t^2$.

Ejercicio 3.5. (Septiembre 2012) Sea la ecuación diferencial $x'' - 4x = e^{2t} + \cos(2t)$.

1. Calcula un sistema fundamental para la ecuación homogénea asociada.
2. Halla la solución de la ecuación propuesta para la que $x(0) = x'(0) = 0$.

Ejercicio 3.6. Resuelve el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + 16x = \cos(\omega t), \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 0, \end{cases}$$

donde ω es un número real no negativo. ¿Qué ocurre cuando $\omega = 4$?

Ejercicio 3.7. Resuelve los problemas de valores iniciales

$$a) \begin{cases} x'' + 16x = \cos(4{,}2\,t), \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 0. \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x'' + 16x = \cos(4{,}2\,t), \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Compara la soluciones obtenidas con la función $x(t) = \frac{\operatorname{sen}(0{,}1\,t)}{0{,}82}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.8. Resuelve la ecuación diferencial $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, donde β, ω_0 y ω son números reales no negativos y E_0 es una constante real.

Ejercicio 3.9. En un circuito RLC simple la evolución de la corriente $i(t)$ está determinada por la ecuación

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) = E'(t), \tag{3}$$

donde $E(t)$ es el voltaje externo y R, L, C son parámetros reales no negativos.

1. Haciendo uso de la ecuación asociada a la carga $q(t)$, halla las condiciones iniciales para la ecuación (3) supuesto que se conoce la carga inicial (q_0) y la corriente inicial (i_0).

2. Supongamos que $C = 1\,\mathrm{F}$, $R = 30\,\Omega$, $L = 7\,\mathrm{H}$ y que la carga y la corriente iniciales en el condensador son nulas. Por último, aplicamos al circuito un voltaje constante de 240 voltios y lo cerramos en el instante $t = 0$. Halla la carga en el condensador para $t > 0$.

3. Repite el apartado anterior para los valores $C = 2\,\mathrm{F}$, $R = 3 \cdot 10^5\,\Omega$ y $L = 7\,\mathrm{H}$.

Ejercicio 3.10. Considera la ecuación para la carga $q(t)$ referida en el ejercicio anterior. Supongamos que el voltaje viene dado por la función $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ (siendo ω una constante positiva).

1. Comprueba que la carga del condensador no está acotada si $R = 0$ y $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2. Comprueba que la carga estará acotada si la resistencia es no nula (es decir, $R \neq 0$).

Ejercicio 3.11 (Carga y descarga de condensadores)**.** Sea un circuito RC con tensión constante E_0 y el condensador completamente cargado.

1. Un fallo eléctrico provoca que la tensión se anule. Tomando como $t = 0$ el instante en que se produce dicho fallo, determina la función que representa la descarga del condensador.

2. Descargado completamente el condensador, se detecta y arregla el fallo. Tomando como $t = 48$ el instante en que se reactiva el circuito, determina la función que representa la carga del condensador.

Ejercicio 3.12. (Julio 2014) Se considera la ecuación diferencial

$$t^2 x'(t) + 5x(t) = e^{(t^{-1})}. \tag{4}$$

1. Determina los posibles dominios maximales de (4).

2. Fijada una condición inicial $x(t_0) = x_0$ cualquiera, ¿existe una única solución de la ecuación (4)? Justifica adecuadamente tu respuesta.

3. Comprueba que, mediante el cambio de variables $s = \frac{1}{t}$, la ecuación (4) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

4. Calcula <u>todas</u> las soluciones de la ecuación (4). (Puedes hacerlo directamente o usando la ecuación obtenida en el apartado anterior.)

5. Halla, si es posible, la solución de (4) que satisface la condición inicial $x(-2) = 0$.

Ejercicio 3.13. Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t^2x''(t) - tx'(t) + x(t) = \ln(t^2), \\ x(-1) = 0,\ x'(-1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. Comprueba que, aplicando el cambio de variable $t = -e^s$ a la ecuación del problema (5), se obtiene una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.
2. Resuelve la ecuación del problema de valores iniciales (5) usando el cambio de variable dado en el apartado a).
3. Resuelve el problema de valores iniciales (5). Debes indicar el intervalo de definición maximal de la solución obtenida.

Ejercicio 3.14. (Junio 2012) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t^5x''(t) + 2t^3(t+1)x'(t) + tx(t) = 1, \\ x(-1) = 1,\ x'(-1) = -2. \end{cases} \tag{6}$$

1. Comprueba que, aplicando el cambio de variable $t = s^{-1}$ a la ecuación del problema (6), se obtiene una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.
2. Resuelve la ecuación del problema de valores iniciales (6) usando el cambio de variable dado en el apartado a).
3. Resuelve el problema de valores iniciales (6). Debes indicar el intervalo de definición maximal de la solución obtenida.

Ejercicio 3.15. (Septiembre 2014) Se considera la ecuación diferencial

$$t^2x''(t) + (4t^2 - 4t)x'(t) + (4t^2 - 8t + 6)x(t) = 0. \tag{7}$$

1. Determina los posibles dominios maximales de (7).
2. Comprueba que, mediante el cambio de variable $y = \dfrac{x}{t^2}$, la ecuación (7) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
3. Calcula <u>todas</u> las soluciones de la ecuación (7) usando la ecuación obtenida en el apartado anterior.
4. Halla, si es posible, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t^2x''(t) + (4t^2 - 4t)x'(t) + (4t^2 - 8t + 6)x(t) = 0 \\ x(-1) = 0,\ x'(-1) = 3. \end{cases}$$