Relación de ejercicios 5

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Mayo de 2017

Ejercicio 5.1. Halla un intervalo, para el cero más próximo al origen, en las siguientes ecuaciones:

a) $4\cos(x) - e^x = 0$; b) $2\cos(x) - \cosh(x) = 0$.

Ejercicio 5.2. Al dividir un polinomio por $x - L$, con $L > 0$, obtenemos que el cociente y el resto tienen todos sus coeficientes positivos. Demuestra que no existe ningún cero de $p(x)$ mayor que L.

Ejercicio 5.3. Aplica los métodos de bisección y secante, con tres cifras decimales exactas, para hallar la raíz de $x^5 + 2x^3 - 1 = 0$ en $[0, 1]$.

Ejercicio 5.4. Halla el valor exacto de una solución positiva de la ecuación $\sqrt{x+3} - x = 0$. Aproxima dicho valor, con 6 cifras decimales exactas, por medio de los métodos de bisección y secante.

Ejercicio 5.5. Encuentra el punto (x, y) del plano en el que se cortan las gráficas de las funciones $y = x^2 - 2$, $y = e^x$, para $x < 0$, con cinco dígitos correctos.

Ejercicio 5.6.

1. Demuestra que mediante el método de Newton–Raphson se puede calcular el inverso de un número sin efectuar divisiones.
2. Halla $\pi^{-1} = 0{,}3183098\ldots$, siendo $x_0 = 10$ y $x_0 = 0{,}3$.

Ejercicio 5.7. Sea $f(x)$ una función suficientemente regular, en un intervalo $[a, b]$, y $s \in (a, b)$ una solución múltiple de la ecuación $f(x) = 0$. Entonces existe $m \geq 2$ tal que $f(x) = (x - s)^m q(x)$, con $q(s) \neq 0$. En este caso, el método de Newton–Raphson puede fallar.

1. Realiza tres iteraciones del método de Newton–Raphson para la función $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ partiendo de $x_0 = 1$.

2. Se propone el siguiente método (modificación del método de Newton–Raphson)

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

   Aplica este método a la función $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$, con $m = 2$, partiendo de $x_0 = 1$.

3. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

Ejercicio 5.8. (Julio 2012) Se considera la ecuación no lineal $x^2 - \cos(x) = 0$.

1. Demuestra que dicha ecuación tiene exactamente dos raíces reales, una positiva y una negativa, con igual valor absoluto. (Sugerencia: estudia la segunda derivada de una función adecuada.)

2. Determina (justificadamente y sin usar la calculadora) un intervalo de longitud 1 al que pertenezca la raíz negativa.

3. Si queremos aplicar el método de Newton–Raphson para aproximar la raíz negativa, ¿cuál será una buena elección de la iteración inicial x_0? Justifica tu respuesta.

4. Realiza dos iteraciones del método de Newton–Raphson usando el valor de x_0 dado en el apartado anterior.

Ejercicio 5.9. (Septiembre 2012) Sea la ecuación no lineal $3x + \operatorname{sen}(2x + 3) + 4 = 0$.

1. Demuestra que dicha ecuación tiene exactamente una raíz real.

2. Determina (justificadamente y sin usar la calculadora) un intervalo de longitud 1 al que pertenezca la raíz.

3. Mediante el método de bisección sobre el intervalo hallado en el apartado b), localiza la raíz en un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ (usando la calculadora si lo deseas).

4. Tomando como punto de partida el intervalo hallado en el apartado c), aplica el método de la secante para calcular la raíz con tres decimales exactos.

Ejercicio 5.10. (Julio 2013) Se considera la ecuación

$$e^x + 1{,}3\,x^3 = 5{,}2\,. \tag{1}$$

1. Demuestra que (1) tiene una única solución real.

2. Determina, sin calculadora, un intervalo de longitud uno que contenga la solución de (1).

3. Para el intervalo hallado en el apartado anterior, determina justificadamente un punto que asegure la convergencia del método de Newton-Raphson.

4. Partiendo del intervalo hallado en el apartado b), calcula tres iteraciones con el método de la secante (operando con cinco cifras decimales).

5. A la vista de los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿cuál es la mejor aproximación que puedes dar de la solución de (1)?

Ejercicio 5.11. (Septiembre 2013) Se considera la ecuación

$$e^{2x} + 5x^3 + 1 = 0. \tag{2}$$

1. Demuestra que (2) tiene una única solución real.

2. Determina un intervalo de longitud 0.25 que contenga a la solución de (2).

3. Para el intervalo hallado en el apartado anterior, determina justificadamente un punto que asegure la convergencia del método de Newton-Raphson.

4. Partiendo del punto hallado en el apartado c), calcula dos iteraciones con el método de Newton-Raphson (operando con cinco cifras decimales).

5. A la vista de los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿cuál es la mejor aproximación que puedes dar de la solución de (2)?

   Observación: Los tres primeros apartados se deben realizar sin el uso de calculadora.

Ejercicio 5.12. (Julio 2014) Se considera la ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 2 = 0\,. \tag{3}$$

1. Determina justificadamente el número exacto de soluciones reales de (3).

2. Determina justificadamente un intervalo en el que se pueda aplicar el método de la secante para obtener una sucesión convergente a una solución de (3).

3. Aplicando el método de Newton-Raphson, con una elección justificada de la aproximación inicial, calcula una solución de (3) con al menos dos decimales exactos.

Ejercicio 5.13. (Septiembre 2014) Se pretende estimar el valor de $\sqrt[5]{3}$ usando un método iterativo.

1. Determina justificadamente una función $f(x)$, un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permitan asegurar que el método de Newton-Raphson asociado converge a $\sqrt[5]{3}$.

2. Realiza tres iteraciones del método de Newton-Raphson con el valor inicial x_0 del apartado anterior.

3. Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{9x_n + 2x_n^6}{6 + 3x_n^5}.$$

   Tomando el mismo valor x_0 que en el apartado anterior, realiza tres iteraciones con este método.

4. A la vista de las iteraciones obtenidas en los dos apartados anteriores, ¿cuál de los dos métodos consideras que converge más rápidamente a la solución? Justifica tu elección.

Ejercicio 5.14. Sea $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ estrictamente decreciente con derivada primera continua. Entonces,

- ☐ $f(x) = 0$ admite una única solución en $[2,4]$.
- ☐ $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in [2,4]$.
- ☐ $f'(x) < 0,\ \forall x \in [2,4]$.
- ☐ $f'(x) > 0,\ \forall x \in [2,4]$.
- ☐ $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in [2,4]$.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5.15. (Septiembre 2013) Sea $f\colon\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Entonces la ecuación $f'(x) = 0$...

- ☐ tiene una única solución.
- ☐ nunca tiene solución.
- ☐ puede tener varias soluciones.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5.16. Al aplicar el método de bisección se consigue, en 7 iteraciones, un error absoluto menor o igual que $5 \cdot 10^{-3}$. Entonces, de los siguientes, el mayor intervalo inicial posible es

- ☐ $[a_0, b_0] = [1{,}9, 3{,}6]$.
- ☐ $[a_0, b_0] = [1{,}7, 3{,}1]$.
- ☐ $[a_0, b_0] = [1{,}5, 2{,}6]$.
- ☐ $[a_0, b_0] = [1{,}3, 2{,}1]$.
- ☐ $[a_0, b_0] = [1{,}1, 1{,}6]$.

☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5.17. (Septiembre 2014) Sea f una función continua en el intervalo $[0,1]$ de forma que tiene una única raíz en el mismo. Para aproximar dicha raíz con un error inferior a 10^{-4} mediante el método de bisección tendremos que hacer...

☐ Al menos 13 iteraciones.

☐ Al menos 16 iteraciones.

☐ Al menos 19 iteraciones.

☐ Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

Ejercicio 5.18. (Julio 2014) Se considera la función $f(x) = (x^2-3x+1)e^{(x/4)}$, $\forall x \in [0,3]$. Se tiene asegurada la convergencia del método de Newton-Raphson tomando como aproximación inicial ...

☐ $x_0 = 2{,}9$.

☐ $x_0 = 1{,}6$.

☐ $x_0 = 0{,}2$.

☐ Las opciones a) y c) son adecuadas pero no la b).

☐ Las opciones b) y c) son adecuadas pero no la a).

☐ Las opciones a) y b) son adecuadas pero no la c).

☐ Las tres opciones a), b) y c) son adecuadas.

☐ Ninguna de las opciones a), b), c) es adecuada.

Ejercicio 5.19. Se aplican los métodos de regula-falsi y secante tomando los mismos valores iniciales x_0 y x_1. Entonces los valores x_2 y x_3 obtenidos por secante

☐ son siempre distintos a los obtenidos por regula-falsi.

☐ pueden ser iguales a los obtenidos por regula-falsi.

☐ son siempre iguales a los obtenidos por regula-falsi.

☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5.20. Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = e^x - 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si se aplica el método de Newton–Raphson, la función correspondiente es

☐ $g(x) = \frac{(x-1)e^x-3x^3+6x}{e^x-3x^2}$.

- ☐ $g(x) = \frac{(x+1)e^x - 3x^3 - 6x}{e^x - 3x^2}$.
- ☐ $g(x) = \frac{(x-1)e^x - 3x^2}{e^x - 6x}$.
- ☐ $g(x) = \frac{(x+1)e^x - 9x^2}{e^x - 6x}$.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5.21. Se pretende resolver la ecuación $f(x) = 0$, con $f(x) = x^5 - 6x^3 - 2$. Se sabe que hay una solución en el intervalo $[-1, 0]$. ¿Cuál de las siguientes elecciones de x_0 nos garantiza, a priori, la convergencia del método de Newton–Raphson?

- ☐ $x_0 = -1$.
- ☐ $x_0 = -0{,}5$.
- ☐ $x_0 = 0$.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 5.22. Estudia e interpreta el siguiente método de resolución de ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{k}$$

¿Qué condiciones para la función f, para la constante k y para el valor inicial asegurarían unicidad de solución y convergencia a la misma del método anterior?

Ejercicio 5.23. Demuestra que mediante el método de Newton-Raphson se puede hallar el inverso de un número sin efectuar divisiones. Aplíquelo para hallar el inverso de 7 partiendo de un valor que garantice convergencia del método y realizando las iteraciones necesarias hasta que dos consecutivos difieran menos de 10^{-3}.

Ejercicio 5.24. Halla un intervalo para el cero más próximo al origen de la ecuación $4\cos(x) - e^x = 0$. Aproxímalo con el método de la secante realizando 10 iteraciones, reduciendo el intervalo de partida lo que sea necesario de forma que converja y las dos últimas iteraciones difieran menos de 10^{-3}.

Ejercicio 5.25. Estudia qué valores hay que dar a los parámetros a y b en el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad \text{con} \qquad g(x) = \frac{ax + x^3}{3 + bx^2}$$

para calcular la raíz cuadrada de 3 con orden de convergencia al menos cuadrática. Aplícalo para obtener la aproximación x_3 partiendo de $x_0 = 1$.

Ejercicio 5.26. Dado el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{2x_n^2 + 2}{2 + 3x_n^2}$$

1. ¿Qué ecuación polinómica pretende resolver el método de iteración funcional, en el intervalo $(0,1)$?

2. Prueba que es convergente. ¿Cuál su orden de convergencia?

3. Calcula 3 iteraciones del método partiendo de $x_0 = 0$.

Ejercicio 5.27. Se considera la ecuación no lineal $xe^{-x/3} + 1 = 0$.

1. Encuentra un intervalo de longitud 1 donde haya una única raíz.

2. Determina cuáles de los métodos de iteración funcional siguientes:

$$1)x_{n+1} = -e^{\frac{x_n}{3}} \quad 2)x_{n+1} = e^{x_n/3} \quad 3)x_{n+1} = 3\ln(-x_n) \quad 4)x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - e^{x_n/3})$$

   a) son compatibles con la ecuación;

   b) son convergentes;

Ejercicio 5.28. (Para ordenador) Halla una solución positiva de la ecuación $\sqrt{x+8} - 5x + 1 = 0$ usando un método de iteración funcional con orden de convergencia lineal y deteniendo el proceso cuando dos iteraciones consecutivas difieran menos de 10^{-4}.

Ejercicio 5.29. Se desea aplicar un método iterativo del tipo

$$x_{n+1} = px_n + \frac{qa}{x_n^2} + \frac{ra^2}{x_n^5}$$

para obtener $a^{1/3}$. Halla cuánto deben valer p, q, r para que la convergencia del método sea al menos cúbica, partiendo de un valor inicial suficientemente próximo (indique si dependen o no de a). Realiza dos iteraciones con este método para aproximar $2^{1/3}$ partiendo de $x_0 = 1$.

Ejercicio 5.30. (Junio 2009) Para calcular $r = \sqrt[3]{7}$ se proponen los métodos de iteración funcional siguientes:

$$1)x_{n+1} = \sqrt{\frac{7}{x_n}} \qquad 2)x_{n+1} = \frac{x_n}{3}\left(2 + \frac{7}{x_n^3}\right).$$

1. Deduce que r es punto fijo de cada una de las funciones de iteración dadas;

2. Prueba que ambos son convergentes de órdenes respectivos 1 y 2;

3. Con el método más rápido, calcula una aproximación de r con 2 decimales de precisión si $x_0 = 2$.

Ejercicio 5.31. Supongamos que se modifica el método de bisección cambiando el punto donde evaluar la función, el centro del intervalo, por el valor $a + \frac{b-a}{3}$ (porque se cree que la solución está más cerca del extremo a). ¿Es convergente este método? ¿Cuál es una cota del error absoluto después de realizar n iteraciones, suponiendo que se toma como aproximación en cada iteración cualquier número del intervalo correspondiente?