Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico** Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación	**Convocatoria ordinaria de junio** 14 de junio de 2016

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración de la prueba es de **3 horas.**
- **No se permite el uso de calculadora programable.**
- La prueba consta de **4 preguntas tipo test y 4 ejercicios. Será valorada sobre 7.5 puntos (1 el test y 6.5 los ejercicios).**
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

Preguntas tipo TEST (M1)

1. (0.2 puntos) La ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{(t-1)(x^2-2)(x-1)}{x+2}$$

tiene exactamente

- ☐ Una solución constante.
- ☐ Dos soluciones constantes.
- ☐ Tres soluciones constantes.
- ☐ Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

2. (0.2 puntos) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$x'''(t) - 2\,x''(t) + 5\,x'(t) + 26\,x(t) = 0$$

es...

- ☐ $\{e^{3t}, \cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\}$
- ☐ $\{e^{-2t}, e^{2t}\cos(3t), e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\}$
- ☐ $\{e^{2t}\cos(3t), e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\}$
- ☐ Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

3. (0.2 puntos) Para aproximar el valor de $\sqrt[3]{(2)}$ se propone el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ donde:

$$g(x) = \frac{4x + x^4}{2 + 2x^3}$$

Entonces para un x_0 adecuado..

- ☐ El método no es convergente.
- ☐ El método converge con orden de convergencia lineal.
- ☐ El método converge con orden de convergencia cuadrático.
- ☐ Ninguna de las otras opciones es correcta.

4. (0.2 puntos) Si $p(x)$ es el polinomio de interpolación para $f(x)$ en los nodos $-1, 0, 1$ y $q(x)$ el interpolante de $f(x)$ en los nodos $1, 0, 2$, entonces,

- ☐ $p(x)$ y $q(x)$ siempre tienen el mismo grado
- ☐ $p(x) - q(x)$ se anula en $x = 1$ y en $x = 2$
- ☐ $(2 - x)p(x) + (x - 1)q(x)$ es el interpolante de f en los nodos $-1, 0, 1, 2$
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. (0.2 puntos) La fórmula de integración numérica

$$\int_0^1 f(x) \sim a_0\, f(0) + a_1\, f(1) + a_2 f'(1)$$

es de tipo interpolatorio si

- ☐ $a_0 = a_1 = a_2 = 1/3$
- ☐ $a_0 = 1/2$, $a_1 = 2/3$, $a_2 = -1/6$
- ☐ Nunca puede ser de tipo interpolatorio.
- ☐ Ninguna de las otras opciones es correcta.

EJERCICIOS

1. (2 puntos) Se considera la ecuación diferencial
$$t\,x(t)\,x'(t) = -t\,\mathrm{sen}(t)(t^2 + x(t)^2) + x(t)^2. \tag{1}$$
   a) Determina los posibles dominios maximales de (1).
   b) Fijada una condición inicial $x(t_0) = x_0$ cualquiera, ¿existe una única solución de la ecuación (1)? Justifica adecuadamente tu respuesta.
   c) Comprueba que con el cambio de variable $x(t) = t\,y(t)$, la ecuación (1) se transforma en la ecuación
$$y'(t) = -\,\mathrm{sen}(t)\frac{(1 + y(t)^2)}{y(t)}. \tag{2}$$
   d) Resuelve la ecuación (2).
   e) Halla, si es posible, la solución de (1) que cumple la condición inicial $x(\frac{\pi}{2}) = \pi$

2. (1.5 puntos) Encuentra las funciones $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ solución del siguiente problema de valores iniciales:
$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 - 2 \\ x_1(0) &= x_2(0) = 1. \end{aligned}\right\}$$

3. (1.5 puntos) Queremos aplicar el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación
$$e^x = 3\cos(x).$$
   a) Encuentra (explícitamente) un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que podamos asegurar que el método de Newton-Raphson que comienza en x_0 converge a la raíz más grande de la ecuación.
   b) Usando la calculadora, lleva a cabo tres iteraciones del método para aproximar esta raíz (esto es, calcula x_3).

4. (1.5 puntos) Dada la tabla de datos

x_i	0	1	2
y_i	1	0	9
y_i'	2		
y_i''	-6		

   a) Calcula el polinomio que interpola los datos de la tabla anterior.
   b) Si se sabe que los datos de la tabla provienen de una función $f(x)$, utiliza el polinomio que has obtenido para estimar el valor de $f(0.5)$. Si se sabe que
$$|f^{v)}(x)| < 2 \qquad \forall x \in [0, 2],$$
   proporciona una cota del error cometido con dicha estimación.
   c) Calcula el spline cúbico $s(x)$ que interpola los datos

x_i	0	1	2
y_i	1	0	9

   y cumple $s'(0) = 2$, $s''(0) = -6$. ¿Es un spline natural? ¿Es periódico?

<u>EJERCICIO PARA NOTA</u> **(1 punto)**

Este ejercicio es de carácter voluntario. Previamente se deben haber realizado el test y los cuatro ejercicios obligatorios. Además, sólo se corregirá cuando la calificación obtenida sea igual o superior a 4.

5. Tenemos dos sustancias radiactivas, A y B, que decaen hasta una tercera C siguiendo la cadena de reacciones
$$A \to B \to C.$$
Llamamos x_1, x_2, x_3 a la cantidad existente de las sustancias A, B y C, respectivamente. Los valores de x_1, x_2, x_3 dependen del tiempo t según el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:
$$\left.\begin{array}{l} x_1' = -\lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 \\ x_3' = \lambda_2 x_2 \end{array}\right\} \tag{3}$$
donde λ_1, λ_2 son las constantes de desintegración, que suponemos son estrictamente positivas.

   a) Demuestra que la *masa total* $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ es una constante independiente del tiempo t.

   b) Suponiendo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, encuentra la solución general del sistema (3).

   c) Con una condición inicial dada $x_1(0) = a \geq 0$, $x_2(0) = b \geq 0$, $x_3(0) = c \geq 0$, demuestra que
$$x_1(t) \to 0, \quad x_2(t) \to 0, \quad x_3(t) \to a + b + c \qquad \text{cuando } t \to +\infty.$$
   (Es decir: toda la masa termina convirtiéndose en la sustancia C.)

   d) Demuestra que si las condiciones iniciales para x_1, x_2, x_3 en $t = 0$ son no negativas, entonces $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ son no negativas para $t \geq 0$.