Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico** Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación	**Convocatoria extraordinaria de septiembre** 5 de septiembre de 2016

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas.**
- **No se permite el uso de calculadora programable.**
- El examen corresponde a la parte de teoría y problemas, constando de **5 preguntas tipo test y 4 ejercicios. Será valorada sobre 9 puntos (1.5 el test y 7.5 los ejercicios).**
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

Preguntas tipo TEST (M1) (0.3 puntos cada pregunta)

1. La ecuación diferencial ordinaria $x' = \frac{e^x}{e^t}$ ...

   ☐ es lineal.

   ☐ está en forma homogénea (es decir, es de la forma $x' = f(x/t)$ para cierta función f).

   ☐ es una ecuación en variables separadas.

   ☐ tiene una solución constante.

   ☐ Ninguna de las otras opciones es correcta.

2. De la ecuación diferencial
$$t\,x'' + (-3\,t + 1)\,x' - 3\,x = 0,$$
se sabe que $\varphi(t) = e^{3t}$ es una solución particular. Aplicando el método de reducción de orden obtenemos la ecuación...

   ☐ $t\,u' + (-3t + 1)\,u = 0$

   ☐ $t\,u' + u = 0$

   ☐ $t\,u' + (3t + 1)\,u = 0$

   ☐ Ninguna de las otras opciones es correcta.

3. Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales dado por $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$. Sus soluciones...

   ☐ son todas periódicas.

   ☐ son todas constantes.

   ☐ convergen todas al punto $(0, 0)$ cuando $t \to +\infty$.

   ☐ divergen todas cuando $t \to +\infty$ (es decir, $x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$).

4. Se considera la función $f(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x + 1$, $\forall x \in [-2, 2]$: Se tiene asegurada la convergencia del método de Newton-Raphson tomando como aproximación inicial ...

   - ☐ $x_0 = 0$
   - ☐ $x_0 = 1$
   - ☐ $x_0 = -1$
   - ☐ Los tres valores garantizan convergencia.
   - ☐ Ninguna de las otras opciones es correcta.

5. Si se aumenta el número de nodos en una fórmula simple de integración numérica de tipo interpolatorio entonces ...

   - ☐ siempre disminuye el error
   - ☐ a veces aumenta el error
   - ☐ nunca disminuye el error

EJERCICIOS

1. (2 puntos)

   Consideramos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \operatorname{sen}(\tan t)\,(1 + (\tan t)^2). \tag{1}$$

   a) Demuestra que el cambio de variable $s = \tan t$ transforma la ecuación (1) en la siguiente:

$$\frac{dx}{ds} = x^2 \operatorname{sen} s. \tag{2}$$

   b) Encuentra la solución general de la ecuación (2).

   c) Encuentra la solución de la ecuación (2) que cumple $x(0) = 1$. ¿Cuál es su dominio maximal de definición? ¿Existe una única solución maximal de (2) que cumple $x(0) = 1$, o hay más de una?

2. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 2\,e^t. \end{cases} \tag{3}$$

   a) Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula todas las soluciones reales de (3).

   b) Halla todas las soluciones de (3) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. (1.7 puntos) Se pretende estimar el valor de $\sqrt{2}$ usando un método iterativo.

   a) Determina qué valores hay que dar a los parámetros a y b en el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad \text{con} \qquad g(x) = \frac{a\,x + x^3}{2 + b\,x^2}$$

   para que converja a $\sqrt{2}$ con orden de convergencia al menos cuadrático.

   b) Realiza tres iteraciones del método empezando en $x_0 = 1$.

   c) Utiliza el método de la secante para aproximar $\sqrt{2}$ eligiendo una función $f(x)$ adecuada.

4. (1.8 puntos)

   a) Halla el polinomio de grado menor que interpola la siguiente tabla de valores en los nodos $(-1, 0, 1, 2)$:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-5	-1	-1	1
y_i'	8	1	0	5

   b) ¿Existe un spline cúbico de clase 2 que interpole los datos anteriores?

   c) ¿Existe un spline cúbico *natural* de clase 2 que interpole los datos anteriores?