Relación de ejercicios 1

Modelos Matemáticos II
Grado en Matemáticas

6 de abril de 2017

Ejercicio 1.1. Dado el funcional $\mathcal{F}(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2(x) - (y'(x))^2)\, \mathrm{d}x$ determina sus extremales en:

1. $\mathcal{D} = \{y \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \mid y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1\}$.
2. $\mathcal{D} = C^2([0, \frac{\pi}{2}])$.
3. $\mathcal{D} = \{y \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \mid y(\frac{\pi}{2}) = 1\}$.

Ejercicio 1.2. Minimiza el funcional $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(x))^2\, \mathrm{d}x$ en $\mathcal{D} = \{y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0, y(1) = 1\}$ sujeto a la restricción $\int_0^1 y(x)\ dx = 1$.

Ejercicio 1.3. ¿Es el funcional

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 (xy'(x) + y(x))\ \mathrm{d}x$$

convexo en $\mathcal{D} = \{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1, y(2) = 2\}$? ¿Y estrictamente convexo? ¿Puedes minimizar el funcional? En caso afirmativo ¿en qué funciones se alcanza el mínimo?

Ejercicio 1.4. Consideramos el funcional $\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(x)(1 + y'(x)^2)\, dx$, con $a < b \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, definido en el conjunto $D := \{y \in \mathcal{C}^1([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0\}$.

1. Determina la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este funcional.
2. Demuestra que si $0 < a < b$ y $f(x) = x$ para $x \in [a,b]$ entonces el funcional F tiene un mínimo global. Calcúlalo.

Ejercicio 1.5. Dados $a < b \in \mathbb{R}$ y una función $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ consideramos el funcional

$$F[y] := \int_a^b f(x)(1 + y'(x)^2)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

definido en el conjunto

$$D := \{y \in \mathcal{C}^1([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0\}. \tag{2}$$

1. Determina la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este funcional.
2. Demuestra que si $0 < a < b$ y $f(x) = x$ para $x \in [a,b]$ entonces el funcional F tiene un mínimo global. Calcúlalo.

Ejercicio 1.6. Calcula los valores propios y las funciones propias del siguiente problema de Sturm Liouville en el intervalo $[0,\pi]$:

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = y'(\pi) = 0. \tag{3}$$

Ejercicio 1.7. Sea $L > 0$. Consideramos el funcional

$$F[y] := \int_0^L (|y''(x)|^2 + |y'(x)|^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^L y(x)\,\mathrm{d}x,$$

definido en el dominio

$$D := \{y \in \mathcal{C}^4([0,L]) \mid y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0\}. \tag{4}$$

1. Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este funcional.
2. Encuentra un punto crítico de este funcional.

Ejercicio 1.8. Calcula la serie de Fourier en $[-\pi,\pi]$ de la función $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

1. $f(x) = x, \quad x \in [-\pi,\pi]$.
2. $f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi,\pi]$.
3. $f(x) = -1$ para $-\pi \le x \le 0$, $f(x) = 1$ para $0 < x \le \pi$.

En cada uno de los casos, expresa la serie de Fourier de dos formas: como combinación lineal de las funciones $\{\mathrm{sen}(nx)\}_{n\ge 1}$, $\{\cos(nx)\}_{n\ge 0}$, y como combinación lineal de las funciones $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Ejercicio 1.9. Consideramos la función $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ para $x \in [0,\pi]$.

1. Calcula su serie de Fourier en senos.

2. Calcula su serie de Fourier en cosenos.

Ejercicio 1.10. Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$, definida en $[-\pi, \pi]$.

1. Demuestra que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

2. Evaluando la serie para $x = \pi$ calcula el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{5}$$

   Dicho valor es la función zeta de Riemann evaluada en $z = 2$, normalmente denotado por $\zeta(2)$.

Ejercicio 1.11. Si $u = u(t,x)$ es una solución de la ecuación de ondas definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que además cumple que

$$u(t,x) = -u(t,-x), \qquad t \in \mathbb{R}, x \geq 0, \tag{6}$$

demuestra que u restringida al conjunto $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ es solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(t,0) = 0 & \text{para } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7}$$

Ejercicio 1.12. Sea u es una solución de la ecuación de ondas en $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ con datos iniciales f, g:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u & \text{en } (0, +\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}. \\ \partial_t u(0,x) = g(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

Supongamos que f, g son funciones en $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[-1, 1]$. Demuestra que para cada $t \geq 0$ la función $x \mapsto u(t,x)$ tiene soporte contenido en $[-1-t, 1+t]$.

Ejercicio 1.13 (Equipartición de la energía)**.** Sea $u = u(t,x)$ una solución de la ecuación de ondas en $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ con datos iniciales f, g:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u & \text{en } (0, +\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}. \\ \partial_t u(0,x) = g(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Supongamos que f, g son funciones $\mathcal{C}^2$ con soporte compacto definidas en $\mathbb{R}$. Definimos la energía cinética $T = T(t)$ y la potencial $U = U(t)$ como se definieron para la ecuación de ondas. Demuestra que

1. $T(t) + U(t)$ es una constante independiente de t, para todo $t \geq 0$,

2. $T(t) = U(t)$ para todo t suficientemente grande.

Ejercicio 1.14. Estamos intentando construir un instrumento de cuerda con cuerdas de un cierto material, con una tensión fija. Ajustamos la tensión de forma que una cuerda de 50 centímetros de longitud produce un sonido que fijamos como la nota La. ¿Qué longitud deben tener otras seis cuerdas para completar toda la escala desde Do hasta Si?

Ejercicio 1.15. Sea $L > 0$ y $p\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos el funcional asociado al problema de la viga:

$$F[y] := \int_0^L |y''(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L p(x)y(x) \,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

definido en el dominio

$$D := \{y \in \mathcal{C}^4([0, L]) \mid y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0\}. \tag{11}$$

Demuestra que este funcional tiene un único mínimo en D.

Ejercicio 1.16. Demuestra que el funcional del Ejercicio 1.7 tiene un único mínimo en el dominio en el que está definido.