Relación de ejercicios 1

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

20 de febrero de 2017

Ejercicio 1.1. Considera la ecuación $x' = x^2 + t^2 + 1$. Suponiendo que admite solución, justifica la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. La solución que vale 2 en el instante $t = 3$ satisface que $x'(3) = 14$.
2. La solución que vale 0 en el instante $t = 3$ satisface que $x'(3) = 10$.
3. Todas las soluciones son estrictamente crecientes.
4. La solución que pasa por el punto $(0, 0)$ tiene un punto de inflexión en dicho punto.

Ejercicio 1.2. Para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, determina su dominio natural de definición y comprueba si las funciones propuestas son solución en algún intervalo. Si es así, ¿cuál es el intervalo maximal donde son solución?

1. $x' = \sqrt{t^2 + 1 - x^2}$; $x(t) = t$
2. $x' = \sqrt{t^2 + 1 - x^2}$; $x(t) = -t$
3. $x' = t + \sqrt{t^2 + 4 - x^2}$; $x(t) = 2$.

Ejercicio 1.3. Comprueba si las leyes propuestas satisfacen la ecuación diferencial $x' = \frac{1}{x}$. En caso afirmativo, determina el intervalo maximal de definición de la ley como solución.

a) $x(t) = \sqrt{2t + 5}$. *b*) $x(t) = \sqrt{2t - 5}$.

c) $x(t) = \sqrt{5 - 2t}$. *d*) $x(t) = \sqrt{-5 - 2t}$.

e) $x(t) = \sqrt{2t}$. *f*) $x(t) = \sqrt{-2t}$.

Ejercicio 1.4. Considera la ecuación diferencial

$$x' = x\,(1 - x)\,. \tag{1}$$

1. Justifica que las únicas soluciones constantes posibles de (1) son

$$i)\ x(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}; \qquad ii)\ x(t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. Comprueba que, si $k \in \mathbb{R}$, entonces las funciones

$$x(t) = \frac{e^t}{k + e^t},\ \forall t \in I_k, \tag{2}$$

donde I_k es un intervalo abierto que depende de k, satisfacen la ecuación (1). Determina, en cada caso, los intervalos abiertos maximales I_k correspondientes.

En los siguientes apartados consideraremos sólo las soluciones que están definidas en $t = 0$.

1. Comprueba que, si $k \in]0, +\infty[$, entonces las funciones de la familia (2) son positivas, estrictamente crecientes y tienen un único cambio de convexidad. ¿Puedes determinar el punto de inflexión para cada una de estas funciones?
2. Comprueba que, si $k \in]-1, 0[$, entonces las funciones de la familia (2) son positivas, estrictamente decrecientes y no tienen cambios de convexidad.
3. Comprueba que, si $k \in]-\infty, -1[$, entonces las funciones de la familia (2) son negativas, estrictamente decrecientes y no tienen cambios de convexidad.
4. Por cierto, ¿qué pasa si $k = 0$? ¿y si $k = -1$?

Ejercicio 1.5. Indica la(s) opción(es) correcta(s) en cada una de las siguientes afirmaciones.

1. Un posible dominio de la ecuación $t^2 x' = x$ es...

   a) $D = \mathbb{R}^2$.

   b) $D = \{(t, x) \mid t \leq 0\}$.

   c) $D = \{(t, x) \mid t \geq 0\}$.

   d) $D = \{(t, x) \mid t < 0\}$.

2. Las soluciones positivas de la ecuación $x' = (xt)^5$ son...

   a) estrictamente crecientes en su dominio maximal.

   b) estrictamente decrecientes en su dominio maximal.

   c) convexas en su dominio maximal.

   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

3. La solución del problema de Cauchy (o problema de valores iniciales)

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen}(x), \\ x(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases}$$

es...

   a) $x(t) = \cos(t), \quad \forall t > 0.$
   b) $x(t) = 0, \quad \forall t > 0.$
   c) El problema dado no tiene solución.
   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Sea la ecuación diferencial $(\ln(t^2+1))\, x'(t) + 3x(t) = 3.$

   a) La función $x(t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$, es la solución que satisface la condición $x(1) = 1$.
   b) La función $x(t) = 1,\ \forall t > 0$, es la solución que satisface la condición $x(1) = 1$.
   c) La función $x(t) = 1,\ \forall t < 4$, es la solución que satisface la condición $x(1) = 1$.
   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. La función $x(t) = t^a,\ \forall t > 0$, es solución de la ecuación

$$t^4 x^{(iv)} + 2t^3 x''' - 6t^2 x'' + 2tx' + 18x = 0$$

si...

   a) $a = 3.$
   b) $a = -1 + i.$
   c) $a = -1 - i.$
   d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 1.6. Si $y = y(t)$ representa la altura de un objeto sobre el que actúa la gravedad de la Tierra, la ecuación que cumple y es

$$y'' = -g,$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (una constante, $\approx 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$).

1. Encuentra todas las soluciones de esta ecuación.

2. Si un objeto se lanza desde el suelo hacia arriba a una velocidad inicial de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, ¿cuál es la solución que describe su altura en función del tiempo? ¿Cuánto tarda en alcanzar su altura máxima?

Ejercicio 1.7. Hay sustancias que decaen espontáneamente en otras (por ejemplo, en procesos radiactivos como el decaimiento del uranio-238). En muchos casos la masa $y(t)$ de la primera sustancia en cierto momento sigue la ecuación diferencial

$$y' = -\lambda y, \tag{3}$$

para cierto parámetro positivo λ. La *vida media*, denotada t_2, de un compuesto es el tiempo necesario para que su masa decaiga a la mitad de la original. Si la cantidad $y = y(t)$ de un compuesto sigue la ley (3), calcula su vida media en función de λ.

Ejercicio 1.8. La vida media del uranio-238 es $4{,}468 \times 10^9$ años. Supongamos que tenemos una barra de uranio-238 puro de 1kg. ¿Cuántos átomos de uranio-238 han decaído después de 1 día? ¿Cuál es la cantidad total de energía que ha emitido en un día? (Teniendo en cuenta únicamente la energía emitida cuando decae el uranio-238 en Torio-234, no cuando decaen sus productos. Para responder esta última pregunta tienes que buscar información adicional.)

Ejercicio 1.9. El Carbono-14 es un isótopo del carbono que decae espontáneamente en nitrógeno con una vida media de 5730 años. Se sabe que un ser vivo contiene Carbono-14 y Carbono-12 (que es estable), en una proporción aproximada de 1,5 partes de Carbono-14 por 10^{12} partes de Carbono-12 (aproximadamente la misma proporción que la atmósfera), y esta proporción empieza a cambiar a partir de su muerte (debido a que ya no intercambia CO_2 con la atmósfera). Se encuentran unos restos arqueológicos que contienen 1 parte de Carbono-14 por cada 10^{12} de Carbono-12. ¿Cuál es la edad estimada de los restos?

Ejercicio 1.10. Una antena parabólica tiene la propiedad de que los rayos que inciden paralelamente en ella se reflejan y se concentran en un mismo punto (ver imagen). Sabiendo que el ángulo de reflexión sobre una superficie es el mismo que el ángulo de incidencia, deduce la ecuación diferencial que debe cumplir la gráfica de (una sección de) la antena y comprueba que $y = x^2$ es una solución.

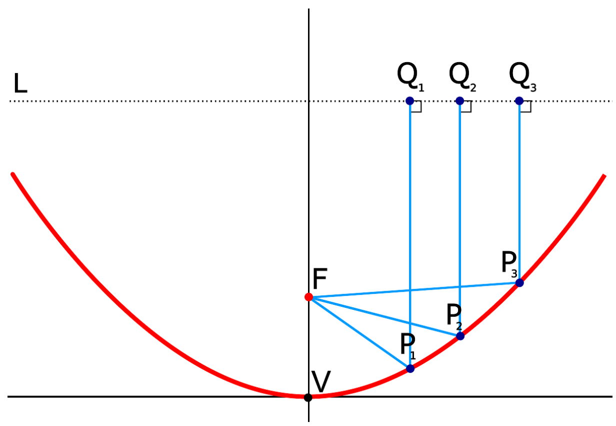

Figura 1: Esquema de una antena parabólica. Imagen de Wikimedia Commons (dominio público)