Relación de ejercicios 4

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

10 de abril de 2017

Ejercicio 4.1. (Julio 2012) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\left\{ \begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) + 9x_2(t), \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - 2x_2(t). \end{aligned} \right. \tag{1}$$

1. Resuelve (1) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente.

2. Calcula la solución de (1) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(0) = (1, 1)$.

Ejercicio 4.2. (Julio 2013) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\left\{ \begin{aligned} x_1'(t) &= 4\, x_2(t), \\ x_2'(t) &= -\, x_1(t). \end{aligned} \right. \tag{2}$$

1. Sin hacer uso de la transformada de Laplace y sin pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula un sistema fundamental de soluciones de (2) formado por funciones reales de variable real.

2. Calcula la solución de (2) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(\pi) = (3, 2)$.

Ejercicio 4.3. (Septiembre 2013) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\left\{ \begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) + 2x_2(t) + 3e^{2t}, \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) - 3e^{2t}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

1. Resuelve (3) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente.

2. Calcula la solución de (3) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(0) = (3, 0)$.

Ejercicio 4.4. (Julio 2014) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) - 2x_2(t) + e^{2t}, \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) + 4. \end{cases} \tag{4}$$

1. Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula todas las soluciones reales de (4).
2. Halla todas las soluciones de (4) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.5. (Septiembre 2014) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) - 3, \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) - 2. \end{cases} \tag{5}$$

1. Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula todas las soluciones reales de (5).
2. Halla todas las soluciones de (5) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

$$a) \begin{cases} x_1' = 12x_1 - 11x_2 - 23x_3 \\ x_2' = 9x_1 - 8x_2 - 17x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 - 7x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

En ambos casos, ¿qué solución satisface la condición inicial $(x_1, x_2, x_3)(0) = (1, 0, -1)$?

Ejercicio 4.7.

1. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - 6x_3(t), \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 6x_3(t), \\ x_3'(t) = 6x_1(t) + 2x_2(t) - 9x_3(t). \end{cases} \tag{6}$$

   Resuelve (6) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente.

2. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - 6x_3(t) + 2\cos(t), \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 6x_3(t) - 2\,\mathrm{sen}(t), \\ x_3'(t) = 6x_1(t) + 2x_2(t) - 9x_3(t) + 2\,\mathrm{sen}(t). \end{cases} \tag{7}$$

   Resuelve (7) sin usar transformadas de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, o sea, hallando una adecuada solución particular que combine senos y cosenos.

3. Cálcula la solución de (7) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2, x_3)(0) = (2, 3, 2)$.

4. ¿Qué puedes comentar sobre la solución obtenida en el apartado anterior para valores de t suficientemente grandes?

Ejercicio 4.8. Las solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = 5\,x_1(t) - 3\,x_2(t), \end{cases}$$

es ...

1. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

4. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 4.9. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2\,x_1(t) - 3\,x_2(t), \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) + 4\,x_2(t) \end{cases}$$

que satisface la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es ...

1. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

4. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 4.10. Una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) - 2\,e^t \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 4\,e^t \end{cases}$$

es ...

1. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + e^t \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 3\,e^t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + e^t \\ \operatorname{sen}(t) - \cos(t) + 3\,e^t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + 3\,e^t \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) + e^t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

4. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.