Relación de ejercicios 6

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Mayo de 2017

Ejercicio 6.1. 1. Construye, usando la base canónica del espacio de polinomios, una base adecuada y mediante la fórmula de Newton, el polinomio que interpola los siguientes datos:

x_i	-1	0	4	-2
f_i	0	1	305	-31

2. ¿Qué ocurre si agregamos el punto $(1,2)$? ¿Y si es agregado el punto $(3,0)$?

Ejercicio 6.2. Estudia para qué valores de a es unisolvente el siguiente problema de interpolación:

"Determinar $p \in \mathbb{P}_2$ tal que $p(-1) = w_0,\ p'(a) = w_1,\ p(1) = w_2$."

Ejercicio 6.3. Al medir f en una serie de puntos x_i, se han obtenido los siguientes valores:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
f_i	0	1	8	26	64	125	216

1. Calcula la tabla de diferencias divididas.
2. Al medir f en el punto $x = 3$ se cometió un error, ya que el valor exacto era $f(3) = 27$ y se obtuvo 26. Estudia la propagación de dicho error en la tabla de diferencias divididas.
3. Supongamos que los valores f_i no son todos exactos sino que unos son más fiables que otros. Si se desea que los menos fiables intervengan en la obtención del menor número posible de coeficientes en la fórmula de Newton, ¿cómo hay que ordenar los cálculos?

Ejercicio 6.4. Dados los valores $f(1{,}00) = 0{,}1924$, $f(1{,}05) = 0{,}2414$, $f(1{,}10) = 0{,}2933$, $f(1{,}15) = 0{,}3492$, calcula el polinomio de interpolación usando la fórmula de Newton y operando con aritmética flotante de cuatro dígitos por redondeo.

1. Estima el valor de $f(1{,}09)$.

2. Proporciona una acotación del error cometido en dicha estimación, sabiendo que los datos proceden de una función cuya derivada de orden 4, en valor absoluto, está acotada por 0,76. Explica todos los pasos a seguir.

Ejercicio 6.5. Utiliza las propiedades de las diferencias divididas para determinar de qué grado es el polinomio p si se conocen los siguientes valores del mismo:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	-5	1	1	1	7	25

Ejercicio 6.6. Halla $p \in \mathbb{P}_5$ tal que $p(-1) = 6$, $p'(-1) = -13$, $p(0) = 2$, $p'(0) = 0$, $p(1) = 0$, $p'(1) = -5$.

Ejercicio 6.7. Halla $p \in \mathbb{P}_4$ tal que $p(-1) = 3,\ p(1) = 3,\ p(2) = -3,\ p'(1) = 2,\ p''(1) = -6$.

Ejercicio 6.8. De una función f se conocen los datos que figuran en el conjunto L y se pretende interpolar en el espacio V. Determina para cada caso si el problema será unisolvente o no.

1. $L = \{f(1), f''(2), f'''(3)\}, \quad V = \mathbb{P}_2.$
2. $L = \{f(0), f'(1), f''(2), f'''(3), f(4)\}, \quad V = \mathbb{P}_4.$
3. $L = \{f(0), f(\frac{\pi}{2}), f(\pi), f(\alpha)\}, \quad V = \langle 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x)\rangle.$

Ejercicio 6.9. Sea el polinomio de interpolación en forma de Newton

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x+1)x - (x+3)(x+2)(x+1) - 3(x+3)(x+2) + 17(x+3) - 26.$$

Queremos obtener la tabla de valores que generó el polinomio anterior.

1. ¿Cuántos datos de interpolación tenía el problema?
2. Recupera la tabla completa de diferencias divididas teniendo en cuenta que los nodos son equidistantes, esto es, $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es constante.

Ejercicio 6.10. Determina a, b y c para que la siguiente función sea un spline cúbico.

$$s(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Ejercicio 6.11. Calcula el spline lineal que interpola los siguientes datos.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	0	2	3	2	4

Ejercicio 6.12. Halla, si es posible, el spline cuadrático s que interpola los datos

$$-s(-1) = s(4) = 1, \quad s(0) = s(3) = 0,$$

y satisface la condición adicional $s(2) = 1$.

Ejercicio 6.13. Calcula el spline cuadrático que interpola los datos

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-2	0	2	3	4

y satisface la condición adicional $s'(1) = 0$.

Ejercicio 6.14. Calcula el spline cúbico $s(x)$ que interpola los datos

$$s(1) = 1,\ s(2) = 2,\ s(3) = -1,\ s(4) = 3,$$

y satisface la dos condiciones adicionales $s''(1) = s''(4) = 0$.
Nota: Los splines cúbicos que satisfacen estas condiciones adicionales se denominan naturales.

Ejercicio 6.15. Halla el spline cúbico $s(x)$ que interpola los siguientes datos:

$$s(1) = 1,\ s(2) = 2,\ s(3) = -1,\ s(4) = 1,$$

y satisface la dos condiciones adicionales $s'(1) = s'(4)$, $s''(1) = s''(4)$.
Nota: Estos splines cúbicos que satisfacen estas condiciones adicionales se denominan periódicos.

Ejercicio 6.16. Halla el spline cúbico de clase uno $s(x)$ que interpola los siguientes datos.

$$s(-1) = -6,\ s(0) = -3,\ s(2) = 33,$$

$$s'(-1) = 9, \quad s'(0) = 0, \quad s'(2) = 48.$$

Ejercicio 6.17. Calcula la expresión del spline cúbico de clase uno que interpola los siguientes datos.

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	0	1	1
y_i'	0	0	0	0

Dibuja su gráfica.

Ejercicio 6.18. Halla el spline cúbico $s(x)$ que interpola los datos $s(0) = 8$, $s(2) = 0$, $s(4) = 8$ y satisface las dos condiciones adicionales $s'(0) = -12$, $s'(4) = 12$.
Nota: este spline cúbico se denomina sujeto.

Ejercicio 6.19. Justifica la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:
"Todo polinomio de grado menor o igual que tres es un spline cúbico natural para el conjunto de nodos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$."

Ejercicio 6.20. (Julio 2012) Se considera el siguiente conjunto de datos:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	2	5	10

.

1. Usando diferencias divididas, calcula el polinomio que interpola los datos de la tabla anterior.

2. Haciendo sólo una cuenta y justificando tu respuesta, ¿cuál es spline cúbico que interpola los datos

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	2	1	5	10

y satisface la condiciones adicionales $s(0) = s'(0) = 2$?

Ejercicio 6.21. (Septiembre 2012) Para cierta función $f(x) : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ se obtiene la tabla de datos

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	4	3	5

1. Calcula el spline cuadrático $s(x)$ que interpola tales datos y, además, satisface la condición $s(0) = 3$.
2. A partir de lo hecho en el apartado anterior, halla una aproximación de $\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$.

Ejercicio 6.22. (Julio 2013) Se considera la función

$$s(x) = \begin{cases} -3\,x^2 + 9\,x - 7, & \text{si } x \in [-1, 1], \\ p(x), & \text{si } x \in [1, 3], \\ -x^3 + 12\,x^2 - 42\,x + 46, & \text{si } x \in [3, 5]. \end{cases} \tag{1}$$

1. Determina $p(x)$ para que $s(x)$ sea un spline cúbico de clase 2.
2. ¿Puede ser $s(x)$ un spline cúbico natural? Justifica tu respuesta.
3. ¿Cuánto vale $s'(0)$? ¿Y $s''(2)$?

Ejercicio 6.23. (Septiembre 2013) De una cierta función $f(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ se conoce la tabla de datos

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	6	3	8
$f'(x_i)$	-3		13
$f''(x_i)$			28

(2)

1. Calcula el polinomio de interpolación para estos datos.
2. A partir de lo hecho en el apartado a), halla una aproximación de $f(0{,}5)$.
3. A partir de lo hecho en el apartado a), halla una aproximación de $f'(0)$.

4. A partir de lo hecho en el apartado a), halla una aproximación de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Ejercicio 6.24. (Julio 2014) Se considera la siguiente tabla de datos

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	1	-1	1
y'_i	1	0	2	1

1. Calcula el spline cúbico de clase uno $s(x)$ que interpola los datos de la tabla anterior.
2. ¿Es $s(x)$ un spline cúbico periódico? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 6.25. (Septiembre 2014) Se considera la siguiente tabla de valores de una cierta función f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	3	-1	4

1. Calcula el polinomio que interpola los datos de la tabla anterior.
2. Utiliza el polinomio que has calculado para estimar el valor de $f(-0{,}5)$. Proporciona una cota del error cometido si se sabe que la función f cumple que $|f^{iv)}(x)| < 3$, $\forall x \in [-1, 2]$.
3. Calcula el spline lineal $s(x)$ que interpola los datos de la tabla.
4. Utiliza el spline obtenido para estimar los valores de $f(-0{,}5)$, $f'(0{,}5)$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ejercicio 6.26. (Julio 2013) El problema de interpolar una tabla de valores $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_5, y_5)\}$ mediante un polinomio de grado menor o igual que 6 ...

- ☐ tiene solución si los nodos son distintos dos a dos.
- ☐ tiene solución única siempre.
- ☐ a veces no tiene solución.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

(Observación: en esta pregunta hay dos posibles respuestas verdaderas.)

Ejercicio 6.27. (Septiembre 2013) Se pretende utilizar el polinomio de interpolación para los datos

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	0	2	-4

para estimar el valor de la función $f(x)$ en $x = 1/2$. Podemos asegurar que el error absoluto cometido es...

- ☐ $\frac{9}{1920}|f^{(v)}(\xi)|$ para un punto $\xi \in [-1, 2]$
- ☐ $\frac{9}{384}|f^{(iv)}(\xi)|$ para un punto $\xi \in [-1, 2]$
- ☐ $\frac{1}{5!}|f^{(v)}(\xi)|$ para un punto $\xi \in [-1, 2]$
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 6.28. (Septiembre 2013) La función

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 3, & \text{si } x \in [-1, 0[\,, \\ x^3 - 3x^2 + 4x + 3, & \text{si } x \in [0, 1], \end{cases}$$

- ☐ es un spline cúbico natural.
- ☐ es un spline cúbico de clase 2.
- ☐ es un spline cúbico de clase 1.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 6.29. (Julio 2014) Sea $s(x)$ un spline cúbico natural. Entonces ...

- ☐ a) $s(x)$ puede ser un spline cuadrático.
- ☐ b) $s(x)$ puede ser un spline cúbico sujeto.
- ☐ c) $s(x)$ puede ser un spline cúbico periódico.
- ☐ d) las tres opciones a), b) y c) son posibles.
- ☐ e) sólo las opciones b) y c) son posibles.
- ☐ f) ninguna de las opciones a), b), c) es posible.

Ejercicio 6.30. (Septiembre 2014) Si se aumenta el número de nodos en un problema de interpolación polinomial entonces se verifica que ...

☐ a) siempre disminuye el error.

☐ b) a veces aumenta el error.

☐ c) nunca disminuye el error.

Ejercicio 6.31. (Septiembre 2014) Se considera la función a trozos

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - 12x^2 + 20x, & -2 \leq x \leq 0, \\ 7x^3 - 12x^2 + 20x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + 12x^2 - 4x + 8, & 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Entonces...

☐ a) $s(x)$ es un spline cúbico natural.

☐ b) $s(x)$ es un spline cúbico periódico.

☐ c) $s(x)$ no es un spline cúbico.

☐ d) Las opciones a) y b) son correctas.

☐ e) Ninguna de las opciones a), b), c) es correcta.