

**Ejercicio 1.** Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones:

- La serie de Fourier de la función  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) := x^3$  para  $x \in [-\pi, \pi]$  converge uniformemente a  $f$  en  $[-\pi, \pi]$ .
- Hay funciones discontinuas que tienen una derivada débil continua.
- Un funcional convexo  $\mathcal{F}: \mathcal{C}^1([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  siempre tiene un mínimo global.

**Solución.**

1. No es cierta. La función  $f(x) = x^3$  cumple  $-x^3 = f(-x) \neq f(x) = x^3$ , luego no es periódica (no cumple  $f(-x) = f(x)$ ). La serie de Fourier de una función no periódica nunca converge uniformemente a  $f$ .
2. Sí hay. Si dos funciones son iguales en casi todo punto entonces su derivada débil es la misma. Por ejemplo, la función constantemente 0 en  $(0, 1)$  es una derivada débil de la función

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0, 1), x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. No necesariamente. Por ejemplo el funcional  $\mathcal{F}(y) := \exp(y(0))$  es convexo pero no tiene mínimo.

**Ejercicio 2.** Dados  $a < b \in \mathbb{R}$  y una función  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  consideramos el funcional

$$F[y] := \int_a^b f(x)(1 + y'(x)^2) dx$$

definido en el conjunto

$$D := \{y \in \mathcal{C}^1([a, b]) \mid y(a) = y(b) = 0\}.$$

1. Determina la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este funcional.
2. Demuestra que si  $0 < a < b$  y  $f(x) \geq 0$  para  $x \in [a, b]$  entonces el funcional  $F$  tiene un mínimo global. Calcúlalo.

**Solución.** Este funcional es de la forma  $\int_a^b F(x, y, y')$ , donde

$$F(x, y, z) := f(x)(1 + z^2).$$

Sabemos que en este caso la ecuación de Euler-Lagrange viene dada por

$$\partial_y F(x, y(x), y'(x)) = \frac{d}{dx} (\partial_z F(x, y(x), y'(x))).$$

Calculamos esto:

$$\begin{aligned} \partial_y F(x, y, z) &= 0, & \partial_z F(x, y, z) &= 2f(x)z, \\ \frac{d}{dx} (\partial_z F(x, y(x), y'(x))) &= 2(f(x)y'(x))'. \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación de Euler-Lagrange es

$$(fy')' = 0. \quad (1)$$

En el caso en que  $0 < a < b$  y  $f(x) \geq 0$  el funcional  $\mathcal{F}$  es convexo: para  $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a, b])$  y  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \theta\mathcal{F}[y_1] + (1 - \theta)\mathcal{F}[y_2] &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x)(\theta y_1'(x)^2 + (1 - \theta)y_2'(x)^2) dx \\ &\geq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x)(\theta y_1'(x) + (1 - \theta)y_2'(x))^2 dx \\ &= \mathcal{F}[\theta y_1 + (1 - \theta)y_2]. \end{aligned}$$

Para la cota anterior hemos usado que  $(\theta a^2 + (1 - \theta)b^2) \geq (\theta a + (1 - \theta)b)^2$  para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$  (esto es, la función  $r \mapsto r^2$  es convexa), y que  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . (También puedes usar otras definiciones de convexidad; por ejemplo, puedes demostrar que

$$\mathcal{F}[y_2] \geq \mathcal{F}[y_1] + \delta\mathcal{F}[y_1; y_2 - y_1] \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in D$$

El resultado se obtiene igual.) Como  $\mathcal{F}$  es convexo, si encontramos una solución de la ecuación (1) en  $\mathcal{C}^1([a, b])$ , sabemos que tiene que ser un mínimo. Pero la función  $y \equiv 0$  en  $[a, b]$  es siempre solución de (1), y cumple las condiciones de contorno. Por tanto, el mínimo se alcanza en la función  $y(x) = 0$ ,  $x \in [a, b]$ . (En realidad, esto se ve directamente a partir de la expresión del funcional: claramente su menor valor se alcanza cuando  $y'(x) = 0$  para todo  $x$ .)

**Ejercicio 3.** Sea  $\Omega := B_1(0)$  la bola unidad abierta centrada en 0 en  $\mathbb{R}^d$ , y  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Consideramos el funcional  $\mathcal{F}: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\mathcal{F}[u] := \int_{\Omega} |\nabla u(x) + F(x)|^2 dx$$

Usando el Teorema de Lax-Milgram, demuestra que este funcional tiene un mínimo global.

**Solución.** Escribimos  $\mathcal{F}$  como

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2 \int_{\Omega} F \nabla u + \int_{\Omega} |F|^2.$$

Encontrar un mínimo de este funcional es lo mismo que encontrar un mínimo de

$$\tilde{\mathcal{F}}[u] := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2 \int_{\Omega} F \nabla u,$$

ya que sólo se diferencian en una constante. Para aplicar el teorema de Lax-Milgram definimos

$$a(u, v) := 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad \ell(v) := -2 \int_{\Omega} F \nabla v.$$

Se comprueba que  $a$  es bilineal en  $H_0^1 \times H_0^1$ , que  $\ell$  es lineal en  $H_0^1$ , y además las dos son continuas porque

$$|a(u, v)| \leq 2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad |\ell(v)| \leq 2\|F\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ . La función  $a$  es además coerciva, como puede verse usando la desigualdad de Poincaré. Como consecuencia, el teorema de Lax-Milgram asegura que  $\tilde{\mathcal{F}}$  tiene un único punto crítico en  $H_0^1(\Omega)$ , que es además un mínimo.

**Ejercicio 4.** Sea  $L > 0$  un número dado y sea  $\Omega := (0, L) \times (0, L) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Buscando una solución en variables separadas, encuentra  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que la siguiente ecuación en derivadas parciales tenga una solución no negativa y no trivial (y encuentra dicha solución):

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \right\}$$

**Solución.** Buscamos una solución de la forma

$$u(x, y) = \phi(x)\psi(y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

para funciones  $\phi, \psi$  apropiadas, definidas en  $[0, L]$ . Usando la ecuación vemos que  $\phi, \psi$  deben cumplir

$$\phi''(x)\psi(y) + \phi(x)\psi''(y) + \lambda\phi(x)\psi(y) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2)$$

y para satisfacer la condición de contorno es suficiente que

$$\phi(0) = \phi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0. \quad (3)$$

De (2) deducimos que (al menos en los puntos donde  $\phi, \psi$  no se anulan)

$$-\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} + \lambda \quad \text{en } \Omega.$$

Como los dos miembros dependen de variables distintas es razonable imponer que sean igual a cierta constante  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\alpha\phi(x), \\ \psi''(y) &= (\alpha - \lambda)\psi(y). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen solución no trivial que cumple la condición de contorno (3) sólo cuando

$$\alpha = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \lambda - \alpha = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

para ciertos  $n, m \geq 1$  enteros. En ese caso las soluciones no triviales son

$$\phi(x) = A \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right), \quad \psi(x) = B \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right), \quad (x \in [0, L])$$

para  $A, B \neq 0$  reales. Elegimos, por ejemplo,  $A = B = 1$ . (Para el ejercicio no necesitamos saber que éstas son las *únicas* soluciones no triviales, basta con saber que son soluciones.) El único valor de  $n, m$  que hace que  $\phi, \psi$  sean no negativas en  $[0, L]$  es  $n = m = 1$ , así que si queremos una solución no negativa debemos tomar

$$\alpha = \lambda - \alpha = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad \text{es decir:} \quad \alpha = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad \lambda = 2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Se puede comprobar que efectivamente la función

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, L]$$

es la solución no negativa que buscamos, correspondiente a  $\lambda = 2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ .