Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Convocatoria Septiembre
15–Septiembre–2016

MODELOS MATEMÁTICOS II
Grado Matemáticas
y Doble grado con Ing. Informática

Apellidos				Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	3^oA	3^oB	4^o

---

1. Dado el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi], \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(5x), & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \operatorname{sen}(x), & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{para} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

1.1) Repite el proceso llevado a cabo para la ecuación de ondas y encuentra una solución $u \in C^2([0,\infty) \times [0,\pi])$.

1.2) ¿Admite este problema alguna formulación variacional? En caso afirmativo, encuéntrala.

1.3) ¿Es u única? Justifica la respuesta.

Solución

1.1) Buscamos una solución en variables separadas; es decir, de la forma $u(t,x) = \phi(t)\psi(x)$ para ciertas funciones ϕ, ψ. Tenemos, para $t \geq 0$,

$$0 = u(t,0) = \phi(t)\psi(0), \qquad 0 = u(t,\pi) = \phi(t)\psi(\pi)$$

luego (a no ser que u sea constantemente 0) obtenemos

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0. \tag{1}$$

Usando la ecuación en derivadas parciales obtenemos

$$\phi''(t)\psi(x) + \phi(t)\psi(x) = \phi(t)\psi''(x).$$

En los puntos (t,x) donde $\phi(t)$, $\psi(x)$ no son cero podemos dividir por $\phi(t)\psi(x)$ y obtener

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} + 1 = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

Como los dos miembros dependen de variables distintas debe ocurrir que

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} + 1 = \lambda = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

para cierta constante λ, para cualquier (t,x) tal que $\phi(t) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$. Equivalentemente,

$$\phi''(t) = (\lambda - 1)\phi(t), \qquad \psi''(x) = \lambda\psi(x). \tag{2}$$

Como estamos buscando una solución particular resolvemos (2) para $t \geq 0$, $x \geq 0$, y vemos que las únicas soluciones no nulas que cumplen además la condición de contorno (1) son

$$\lambda = -n^2, \qquad \psi(x) = \operatorname{sen}(nx), \qquad \phi(t) = A\cos(t\sqrt{1+n^2}) + B\operatorname{sen}(t\sqrt{1+n^2})$$

para ciertos $n \geq 1$ enteros, $A, B \in \mathbb{R}$ no ambas nulas. Por el principio de superposición (por linealidad) podemos construir otras soluciones usando combinaciones lineales de éstas:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\left(A_n\cos(t\sqrt{1+n^2}) + B_n\operatorname{sen}(t\sqrt{1+n^2})\right),$$

con A_n, B_n constantes reales para $n \geq 1$. Para cumplir las condiciones iniciales tiene que cumplirse que

$$\operatorname{sen}(5x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx), \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \phi'(0)\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx)\sqrt{1+n^2}.$$

De esto deducimos que

$$A_5 = 1, \quad A_n = 0 \text{ para } n \neq 5, \qquad B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B_n = 0 \text{ para } n \neq 1.$$

La solución final queda

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + \operatorname{sen}(5x)\cos(t\sqrt{26}).$$

1.2) Sí la admite. Sabemos que la ecuación de ondas es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^{\pi}\int_0^{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dt\, dx.$$

(Se entiende que los términos bajo la integral están evaluados en (t,x).) De la misma forma puede verse que la ecuación del ejercicio es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^{\pi}\int_0^{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dt\, dx.$$

1.3) Supongamos que tenemos dos soluciones u_1, u_2. Llamamos $u := u_1 - u_2$. Por linealidad, u resuelve el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi], \\ u(0,x) = 0, & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{para} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Usamos el siguiente funcional de energía, sugerido por el apartado anterior:

$$\mathcal{E}[t] := \int_0^{\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + u(t,x)^2\right] dx.$$

Se comprueba, usando la ecuación y las condiciones de contorno (y teniendo en cuenta que la derivación bajo la integral está justificada gracias a que la solución es de clase $\mathcal{C}^2$), que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0.$$

Como tanto u_1 como u_2 cumplen las mismas condiciones iniciales, vemos que $\mathcal{E}(0) = 0$. Luego $\mathcal{E}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, lo que implica que $u(t,x) = 0$ para casi todo $t \geq 0$, $x \in [0,\pi]$. Por continuidad $u(t,x) = 0$ para casi todo $t \geq 0$, y por tanto $u_1 = u_2$, así que el problema del ejercicio tiene una única solución de clase $\mathcal{C}^2$.

---

2. Sean $\Omega := (-1,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) := \begin{cases} e^x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen}(x\,y) + 2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

2.1) Determina los valores de $p \in [1,+\infty]$ para los que $f \in L^p(\Omega)$.

2.2) Determina si existen las derivadas parciales débiles de primer orden de f y, en su caso, establece cuáles son los valores de p para los que dichas derivadas parciales están en $L^p(\Omega)$.

2.3) Para esta f, determina la existencia y unicidad de mínimo en $H_0^1(\Omega)$ del siguiente operador:

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + (u-f)^2\right) d(x,y).$$

Solución

2.1) La función f es continua a trozos en Ω, luego $f \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,+\infty]$.

2.2) Para la derivada débil con respecto a y escribimos, para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x,y)\partial_y \phi(x,y)\,dy\,dx = -\int_{-1}^1 \int_0^1 \partial_y f(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx.$$

Observa que esta igualdad puede escribirse usando la derivada parcial clásica de f con respecto a y, ya que para cualquier x fijo f es derivable (de hecho, $\mathcal{C}^\infty$) con respecto a y. Por tanto la derivada parcial (tanto débil como clásica) de f con respecto a y es

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ x\cos(xy) & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

La derivada $\partial_y f$ es una función continua a trozos, y por tanto está en todos los espacios $L^p(\Omega)$ con $p \in [1,+\infty]$.

Para ver si hay derivada débil con respecto a x escribimos la integral correspondiente. Como ahora f no es derivable en x tenemos que partir la integral en dos trozos. Si existiese la derivada débil $\partial_x f$ debería cumplirse que:

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 \int_0^1 \partial_x f(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx &= \int_{-1}^1 \int_0^1 f(x,y)\partial_x\phi(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_0^1 e^x \partial_x \phi(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^1 (\operatorname{sen}(xy)+2)\partial_x\phi(x,y)\,dy\,dx \\ = -\int_{-1}^0 \int_0^1 e^x\phi(x,y)\,dy\,dx &- \int_0^1 \int_0^1 y\cos(xy)\phi(x,y)\,dy\,dx + \int_{-1}^0 \phi(0,y)\,dy - 2\int_0^1 \phi(0,y)\,dy. \end{aligned} \tag{3}$$

Tomando ϕ con soporte en $(-1,0)\times(0,1)$ o con soporte en $(0,1)\times(0,1)$ los dos últimos términos no aparecen, y vemos que si existiese la derivada débil con respecto a x deberíamos tener

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} e^x & \text{si } -1 < x < 0, \\ y\cos(xy) & \text{si } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

con igualdad cierta en casi todo punto de Ω. Pero esta expresión no es compatible con (3) para funciones ϕ tales que $\int_{-1}^0 \phi(0,y)\,dy - 2\int_0^1 \phi(0,y)\,dy \neq 0$. Esto demuestra que no existe la derivada $\partial_x f$ en sentido débil.

2.3) Podemos reescribir $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2 - 2uf) + \int_\Omega f^2.$$

El último término es una constante, luego encontrar los mínimos de $\mathcal{F}$ es equivalente a encontrar los mínimos de

$$\mathcal{G}[u] = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2 - 2uf).$$

Este funcional puede escribirse como

$$\mathcal{G}[u] = \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u).$$

donde definimos, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,v) := 2\int_\Omega \nabla u \nabla v + 2\int_\Omega uv, \qquad \ell(v) := 2\int_\Omega vf.$$

Comprobamos de la misma forma que en clase que se cumplen todas las condiciones para aplicar el Teorema de Lax-Milgram: a es bilineal, continua, coerciva y simétrica, ℓ es lineal y continua. El teorema nos dice entonces que existe un único mínimo del funcional $\mathcal{G}$ en $H_0^1(\Omega)$, y por tanto lo mismo es cierto para $\mathcal{F}$.

---

3. Determina, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, el número de extremales del siguiente problema variacional:

$$\min_{y \in \mathcal{D}} \int_0^{4\pi} \left[\Big(y'(x)\Big)^2 - \alpha\Big(y(x) - \operatorname{sen}(8x)\Big)^2 \right] dx, \qquad \mathcal{D} := \Big\{ y \in C^2([0,4\pi]) : y(0) = y(4\pi) = 0 \Big\}.$$

Solución. Los extremales son las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange asociada que están en $\mathcal{D}$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a un funcional de este tipo se puede obtener con la fórmula general vista en clase (o calculándola directamente a partir de la condición de que la derivada de Gâteaux debe ser 0). Se obtiene la ecuación

$$y'' + 2\alpha y = 2\alpha \operatorname{sen}(8x). \tag{4}$$

con las condiciones

$$y(0) = y(4\pi) = 0. \tag{5}$$

El caso $\alpha = 0$ es especial, ya que la ecuación se vuelve homogénea. En ese caso, hay un único extremal: la función y constantemente igual a 0.

En el resto de los casos podemos saber cuántas soluciones tiene esta ecuación usando el teorema de la alternativa de Fredholm. Estudiamos primero la ecuación homogénea $y'' + 2\alpha y = 0$: las únicas soluciones no triviales que cumplen además $y(0) = y(4\pi) = 0$ son

$$y(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{4}\right),$$

con $n \geq 1$ un entero, que corresponden a

$$\alpha = \frac{n^2}{32}$$

Por el Teorema de Fredholm, para otros valores de α las ecuaciones (4)–(5) tienen una única solución. Cuando $\alpha = n^2/32$ con $n \geq 1$ entero tenemos que comprobar el valor de la integral

$$\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{4}\right) \operatorname{sen}(8x)\, dx.$$

Vemos que dicha integral es 0 salvo cuando $n = 32$. La conclusión final es que:

1. Cuando $\alpha = n^2/32$ para algún $n \geq 1$ entero con $n \neq 32$, los extremales del problema variacional forman una familia de un parámetro (hay infinitos extremales).

2. Cuando $\alpha = 32$ no hay extremales.

3. En cualquier otro caso hay un único extremal del problema variacional.

---

4. Considera una función regular u ~~que decae en infinito y~~ que resuelve el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^2, & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.1) Sea $v := \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$. ¿Qué PVI resuelve? Asumiendo que existe una función $M \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$|v(t,x)| + |\partial_t v(t,x)| \leq M(x) \qquad \text{para todo } (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R},$$

justifica que $v \equiv 0$.

4.2) Usando el apartado anterior, deduce que u ha de ser de la forma $u(t,x) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, y determina las funciones a, b y c.

4.3) Compara la expresión obtenida en 4.2) con la deducida en clase para probar que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Puedes usar la expresión dada en clase aunque la condición inicial en este caso no sea acotada.)

Solución

4.1) La función v resuelve el PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = 0, & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bajo las condiciones del ejercicio la solución es única. Como $v \equiv 0$ es solución de este PVI, deducimos que v es constantemente 0. El hecho de que la solución es única puede verse por ejemplo considerando dos soluciones v_1, v_2, definiendo $w := v_1 - v_2$, y considerando la energía

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\mathbb{R}} w(t,x)^2 \, dx.$$

Dicha energía está bien definida gracias a la condición dada en el ejercicio, y también debido a esa condición podemos usar el teorema de derivación bajo la integral para obtener

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0.$$

Como $\mathcal{E}(0) = 0$, esto nos permite deducir que $\mathcal{E}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, lo que implica $v_1 = v_2$ en casi todo punto. Por continuidad, $v_1 = v_2$.

4.2) Fijando $t \geq 0$ e integrando tres veces en x la expresión

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

obtenemos

$$u(t,x) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2,$$

donde a, b, c son constantes de integración que pueden depender de t. Para determinar a, b, c usamos que u debe ser solución del PVI:

$$x^2 = u(0,x) = a(0) + b(0)x + c(0)x^2,$$

luego $a(0) = b(0) = 0$, $c(0) = 1$. Por otra parte, para satisfacer la ecuación del calor,

$$a'(t) + b'(t)x + c'(t)x^2 = 2c(t).$$

Esto debe ser cierto para todo $c \in \mathbb{R}$. En particular, para $x = 0$,

$$a'(t) = 2c(t).$$

Esto implica

$$b'(t)x + c'(t)x^2 = 0,$$

luego

$$b'(t) = -c'(t)x \qquad \text{para } x \neq 0.$$

La única posibilidad es que $c'(t) = b'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Finalmente,

$$c(t) = 1, \quad b(t) = 0, \quad a(t) = 2t \qquad \text{para } t \geq 0.$$

La solución u queda

$$u(t,x) = 2t + x^2 \qquad \text{para } (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

4.3) La expresión de la solución de la ecuación del calor dada en clase es

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} y^2 \Phi(t, x-y)\, dy,$$

donde Φ es la solución fundamental de la ecuación del calor,

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Escribiendo esta expresión de u para $x = 0$ obtenemos

$$2t = u(t,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy.$$

Para $t = 1/4$ queda

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2}\, dy,$$

que es el valor que se pide.