



Universidad de Granada

Matemática Aplicada

**Modelos Matemáticos II**  
Grado en Matemáticas

**2ª Prueba de clase**  
2 de junio de 2017

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

**Ejercicio 1.** Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones, y justifica brevemente tus respuestas:

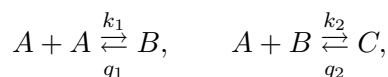
1. Las soluciones de la ecuación logística  $u'(t) = u(t)(1 - u(t))$  con condición inicial  $u(0) > 0$  son siempre crecientes.
2. La transformada de Fourier de una función  $C^\infty(\mathbb{R})$  con soporte compacto es también de soporte compacto.
3. Si  $u'(t) = \lambda u(t)$  representa la evolución en tiempo de una población, las unidades de  $\lambda$  deben ser  $[T]^{-1}$ .

**Ejercicio 2.** Si  $F$  es la transformada de Fourier  $F[f](y) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy} dy$ , demuestra que para  $f, g$  en la clase de Schwartz se tiene

1.  $F[f'](y) = 2\pi iyF[f](y)$ .
2.  $F[f * g] = F[f]F[g]$ .

(Donde  $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x - z) dz$  es la convolución de  $f$  y  $g$ .)

**Ejercicio 3.** Consideramos una reacción química con compuestos  $A, B, C$  donde las reacciones posibles son



donde las constantes de reacción  $k_1, k_2, q_1, q_2$  son positivas.

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones que gobiernan la evolución en tiempo de las densidades  $a, b, c$  de cada uno de los compuestos  $A, B, C$ .
2. Demuestra que la cantidad  $a + 2b + 3c$  se conserva para todo tiempo.
3. Encuentra todos los equilibrios (no negativos) del sistema.
4. Supongamos que todas las constantes son igual a 1 (es decir,  $k_1 = k_2 = q_1 = q_2 = 1$ ). Si la condición inicial es  $a(0) = 6, b(0) = c(0) = 0$ , y suponiendo que el sistema se aproxima a un equilibrio, ¿cuál debe ser el valor de  $a$  una vez que el sistema ha alcanzado el equilibrio?

**Ejercicio 4.** Consideramos la ecuación del calor en un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  acotado con frontera  $C^\infty$ , con condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u && \text{en } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(t, x) &= 0 && \text{en } [0, +\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

Sea  $u$  una solución clásica de la ecuación anterior, con  $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ .

1. Demuestra que la cantidad

$$E(t) := \int_{\Omega} u(t, x)^2 dx,$$

definida para  $t \geq 0$ , es decreciente en tiempo.

2. Usando la desigualdad de Poincaré, demuestra que para cierta constante  $\lambda > 0$  se tiene que

$$E(t) \leq E(0)e^{-\lambda t} \quad \text{para } t \geq 0.$$