

|           |                   |     |       |  |  |     |    |
|-----------|-------------------|-----|-------|--|--|-----|----|
| Apellidos |                   |     | Firma |  |  |     |    |
|           |                   |     |       |  |  |     |    |
| Nombre    | D.N.I o pasaporte | 3°A |       |  |  | 3°B | 4° |
|           |                   |     |       |  |  |     |    |

1. Dado  $L > 0$ , notamos  $C_0^1(0, L)$  el conjunto de funciones  $y$  de clase 1 en  $[0, L]$  tales que  $y(0) = y(L) = 0$ .

1.a) Consideramos el problema variacional de minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^L (y'(x))^2 dx \quad \text{en el conjunto} \quad \mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1(0, L) : \int_0^L y^2(x) dx = 1 \right\}.$$

Encuentra el valor del mínimo  $m = m(L)$  y una función  $y_m(x)$  donde se alcance. ¿En cuántas funciones se alcanza?

1.b) En función del mínimo  $m$  y de la función  $y_m(x)$  que resuelven el apartado anterior, encuentra la constante  $C$  más pequeña tal que

$$\int_0^L u(x)^2 dx \leq C \int_0^L u'(x)^2 dx, \quad \text{para toda } u \in C_0^1(0, L),$$

y una función no nula que demuestre que la constante  $C$  no puede ser menor.

2. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^b ((y'(x))^2 + 3e^x y(x) - y(x)^2) dx + 2(y(b))^2$$

en  $\mathcal{D} = H_0^1(0, b)$ .

2.a) Demuestra<sup>1</sup> la siguiente desigualdad de Poincaré para  $u \in H_0^1(0, b)$ :

$$\|u\|_{L^2(0,b)} \leq b \|u'\|_{L^2(0,b)}.$$

2.b) Demuestra que, en  $H_0^1(0, b)$ ,  $\|u\| := \|u'\|_{L^2(0,b)}$  es una norma equivalente a la inducida de  $H^1(0, b)$ , es decir, a  $\|u\|_{H^1(0,b)} := (\|u\|_{L^2(0,b)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,b)}^2)^{1/2}$ .

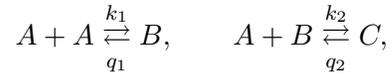
2.c) Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones sobre  $b$  para garantizar la existencia de un único elemento  $y \in \mathcal{D}$  en donde  $\mathcal{F}$  alcance el mínimo.

2.d) Calcula las extremales<sup>2</sup> de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{D} \cap C^2([0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}])$  (es decir, en el caso  $b = \pi/\sqrt{2}$ ). ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

<sup>1</sup>Recuerda que  $C_0^1(0, b)$  es denso en  $H_0^1(0, b)$

<sup>2</sup>Puedes buscar soluciones particulares de la EDO obtenida del tipo  $y_p(x) = Ae^x + B$

3. Consideramos una reacción química con compuestos  $A, B, C$  donde las reacciones posibles son



donde las constantes de reacción  $k_1, k_2, q_1, q_2$  son positivas.

- 3.a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones que gobiernan la evolución en tiempo de las densidades  $a, b, c$  de cada uno de los compuestos  $A, B, C$ .
- 3.b) Demuestra que la cantidad  $a + 2b + 3c$  se conserva para todo tiempo.
- 3.c) Encuentra todos los equilibrios (no negativos) del sistema.
- 3.d) Supongamos que todas las constantes son igual a 1 (es decir,  $k_1 = k_2 = q_1 = q_2 = 1$ ). Si la condición inicial es  $a(0) = 6, b(0) = c(0) = 0$ , y suponiendo que el sistema se aproxima a un equilibrio, ¿cuál debe ser el valor de  $a$  una vez que el sistema ha alcanzado el equilibrio?

4. Se considera la siguiente ecuación de difusión:  $\alpha \partial_t u = \beta \partial_{xx}^2 u - \gamma(u - \delta)$ , para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ , y donde  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son constantes positivas.

- 4.a) Sean  $y = \frac{x}{\lambda}, \tau = \frac{t}{\sigma}$  y  $v(y, \tau) = \frac{u(x, t)}{\delta} - 1$ , donde  $u(x, t)$  resuelve la ecuación anterior. Determina las expresiones que deben adoptar  $\sigma$  y  $\lambda$ , en términos de las constantes originales, para que  $v(y, \tau)$  satisfaga la ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (1)$$

- 4.b) Resuelve la ecuación (1) sujeta a la condición inicial  $v(y, 0) = 1$ . Por si te resultase útil, recuerda que la transformada de Fourier de la función  $f(y) = e^{-\varepsilon^2 y^2}$  es  $\hat{f}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{|\varepsilon|} e^{-\frac{\pi^2 z^2}{\varepsilon^2}}$ .
- 4.c) Caso de existir, encuentra todas las ondas viajeras asociadas a la ecuación (1). ¿Hay alguna limitación con respecto a la velocidad de propagación de las mismas?