

Apellidos

Firma

Nombre

D.N.I o pasaporte

3º A 3º B 4º

--	--	--

1. 4 puntos JUSTIFICA RAZONADAMENTE la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

1.a) La única solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0, x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

satisface $\hat{u}(t, 1) = \sqrt{2} e^{-2\pi(1+ict)}$, donde \hat{u} denota la transformada de Fourier de u respecto de la variable x . (Por si te resultase de ayuda: $\hat{g}(y) = \sqrt{2} e^{-2\pi y^2}$ para $g(x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2}$).

1.b) El problema de contorno $x^2 y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = \cos(\ln(x))$ con la condición $y(1) = y(e^\pi) = 0$ no tiene solución en el intervalo $[1, e^\pi]$.

1.c) Considera la ecuación: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, para $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, 1]$ con condiciones de contorno $u(t, 0) = 0$, $u(t, 1) = 0$ y dato inicial $u(0, x) = x(x - 1)$. Entonces, el funcional $E(t) = \int_0^1 (\partial_t u)^2 + c^2 (\partial_x u)^2 dx$ vale constantemente $c^2/6$ sobre la solución, y esta es única.

1.d) Considerado el problema de minimizar $\mathcal{F}[y] := \int_0^1 F(y(x), y'(x)) dx$, sobre el conjunto $\mathcal{D} = C^1([0, 1])$ (con $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$), entonces toda extremal $y(x)$ que esté en $C^2([0, 1])$ verifica:

$$\frac{\partial F}{\partial p}(y(0), y'(0)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(y(1), y'(1)) = 0, \quad y \quad F(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - y'(x) \frac{\partial F}{\partial p}(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = \text{constante}.$$

2. 3 puntos Dada una función $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[u] := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{8} \int_0^1 \text{sen}(x)(u(x))^2 dx + \int_0^1 f(x)u(x) dx,$$

definido en $H_0^1(0, 1)$.

2.a) Demuestra que la siguiente desigualdad:

$$\int_0^1 (v(x))^2 dx \leq C \int_0^1 (v'(x))^2 dx,$$

es cierta para toda $v \in H_0^1(0, 1)$, para alguna constante $C \leq 1$.

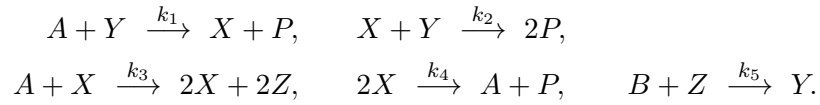
2.b) Prueba que $\|u\| := \left(\int_0^1 (v'(x))^2 dx \right)^{1/2}$ es una norma en $H_0^1(0, 1)$.

2.c) Demuestra que el funcional \mathcal{F} tiene un único mínimo en $H_0^1(0, 1)$.

2.d) Sabiendo que dicho mínimo es $C^2(0, 1)$, demuestra que existe una única solución del siguiente problema de contorno:

$$4w'' = w \text{sen}(x), \quad w(0) = 0, \quad w(1) = k \in \mathbb{R}.$$

3. 3 puntos Consideramos las siguientes cinco reacciones químicas para las especies X , Y , y Z (A , B y P se consideran datos), que sirven como modelo realista simple para la reacción de Belousov-Zhabotinsky:



- 3.a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones ordinarias que satisfacen las concentraciones $x = [X]$, $y = [Y]$, $z = [Z]$ de las especies X, Y, Z , dependientes del tiempo t . Las concentraciones de A y B (llamadas a, b) se consideran datos dados.
- 3.b) En las ecuaciones anteriores, supón que a y b son constantes y considera el cambio de variables

$$\tau = \alpha t, \quad u(\tau) = \lambda x(t), \quad v(\tau) = \lambda y(t), \quad w(\tau) = \lambda z(t).$$

Encuentra la expresión de las constantes λ , α , Q_1 , Q_2 y Q_3 de forma que se cumplan

$$\frac{du}{d\tau} = v - uv + u(Q_1 - Q_2u), \quad \frac{dv}{d\tau} = -v - uv + Q_3w, \quad \frac{dw}{d\tau} = 2Q_1u - Q_3w,$$

y comprueba que α es una frecuencia (es decir, tiene unidades de 1/tiempo), y que v y Q_2 no tienen dimensiones físicas.

- 3.c) Encuentra todos los equilibrios del sistema anterior y prueba que todos verifican $v \leq 2Q_1$.