

Apellidos

Firma

Nombre

D.N.I o pasaporte

3ºA	3ºB	4º
-----	-----	----

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------

1. 2 puntos Se considera la función real de variable real  $f(x) = \ln(|x|)$ .  
¿Está en  $L^2(0, 1)$ ? ¿Está en  $L^2(0, \infty)$ ? ¿Está en  $H^1(0, 1)$ ?

2. 3 puntos Dada una función  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$  consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[u] := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \frac{1}{8} \int_0^1 \cos(x)(u(x))^2 dx + \int_0^1 f(x)u(x) dx,$$

definido en  $H_0^1(0, 1)$ .

- 2.a) Denotando por  $v'$  la derivada débil de una función  $v \in H^1(0, 1)$ , considera el funcional  $N(v) := \|v'\|_{L^2(0,1)}$  y demuestra la siguiente desigualdad:

$$K \|v\|_{L^2(0,1)} \leq N(v)$$

para alguna constante  $K \geq 1$  y para cada  $v \in H^1(0, 1)$ . Usando este hecho, prueba que  $N(v)$  es una norma en  $H_0^1(0, 1)$ .

- 2.b) Demuestra que el funcional  $\mathcal{F}$  tiene mínimo en  $H_0^1(0, 1)$  y estudia su unicidad.

- 2.c) Sabiendo que dicho mínimo es  $C^2(0, 1)$ , demuestra que existe una única solución  $w$  del siguiente problema de contorno:

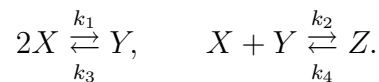
$$4w''(x) + w(x) \cos(x) = 0, \quad w(0) = 7, \text{ y } w(1) = 0.$$

3. 2 puntos La ecuación diferencial  $u_t + 4u_x = 0$  con  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$  modela el transporte de sustancias a lo largo de un espacio esencialmente unidimensional.

- 3.a) Emplea el método de separación de variables y encuentra al menos 3 soluciones distintas de dicha ecuación.

- 3.b) Encuentra una solución que verifique:  $u(t = 0, x) = \cosh(x) + \sinh(2x)$

4. 3 puntos Consideramos las siguientes reacciones químicas con compuestos  $X, Y, Z$ :



- 4.a) Describe las ecuaciones que gobiernan la evolución en tiempo de las concentraciones  $x, y, z$  respectivas de cada uno de los compuestos  $X, Y, Z$ .

- 4.b) Determina el conjunto  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ax(t) + by(t) + cz(t) \text{ se conserva en tiempo}\}$ .

- 4.c) Encuentra, si los hay, todos los equilibrios del sistema.