



Universidad de Granada

Matemática Aplicada



## Modelos Matemáticos II

Grado en Matemáticas y Doble grado en Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

27 de junio de 2019

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Duración: **3 horas.**

Grupo (marca el que corresponda): 3<sup>o</sup>A , 3<sup>o</sup>B , 4<sup>o</sup>

**Ejercicio 1.** Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- 1.a) Todas las funciones en  $H^1(0, 1)$  están en  $C^1(0, 1)$ .
- 1.b) Si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función impar y  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , entonces su transformada de Fourier es una función real.
- 1.c) La función  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $p(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases}$  no tiene derivada débil.
- 1.d) Si dos funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivables y  $2\pi$ -periódicas coinciden sobre el intervalo  $[0, \pi]$  y además

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces  $f = g$ .

**Ejercicio 2.** Dado el dominio  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ , y un número  $k \in (0, \pi/2)$ , consideramos el funcional  $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\mathcal{F}[u] := \int_{\Omega} \left[ \cos(kx) |\nabla u(x, y)|^2 + \frac{\partial_x u(x, y) u(x, y) \sin(y)}{2} + \partial_y u(x, y) \cos(x) \cos(y) \right] dx dy.$$

- 2.a) Sabiendo que  $\int_0^1 y(x)^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 y'(x)^2 dx$ , para toda función  $y \in C_0^1([0, 1])$ , demuestra que

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y)^2 dx dy \leq C \int_0^1 \int_0^1 |\nabla u(x, y)|^2 dx dy$$

para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$  y encuentra una constante  $C$  que hace la desigualdad cierta.

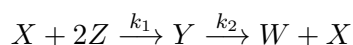
- 2.b) Encuentra un valor  $0 < k_* < \pi/2$  tal que  $\mathcal{F}$  alcanza un único mínimo en  $H_0^1(\Omega)$  para cualquier  $0 < k < k_*$ , y justifica que es así. Ayuda: recuerda que el coseno decrece en el intervalo  $[0, \pi/2]$ .

**Ejercicio 3.** Dado el problema variacional:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}[y] := \int_{\pi}^{2\pi} \left( \frac{y'(x)^2 + 7y(x)^2}{2} \right) dx \text{ en el conjunto } \mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1(\pi, 2\pi) : \int_{\pi}^{2\pi} y^2(x) dx = 1 \right\}.$$

Justifica que tiene solución, calcula todas las extremales y determina el mínimo  $m$  y la(s) función(es) sobre la(s) que lo alcanza.

**Ejercicio 4.** Consideramos el sistema de reacciones químicas siguientes:



donde  $k_1, k_2 > 0$ , y denotamos  $x(t) = [X]$  e  $y(t) = [Y]$  a las concentraciones respectivas de las sustancias químicas  $X$  e  $Y$ , y suponemos que  $z = [Z]$  y  $w = [W]$  son constantes para todo  $t \geq 0$ . Entonces, si las concentraciones iniciales de  $[X]$  e  $[Y]$  son  $[X]_0 = 1$  e  $[Y]_0 = 2$  respectivamente, determina todos los estados de equilibrio del proceso.