Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** 25 de mayo de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (0,5 puntos)**.**

1. (0,15 puntos) Encuentra los coeficientes a_n, b_n de la serie de Fourier de la función $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(3x + \frac{\pi}{4})$, de forma que
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

2. (0,2 puntos) Consideramos la función $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := |x|^{3/2}$. ¿Para qué enteros $k \geq 0$ es cierto que $f \in H^k(-1, 1)$? Justifica tu respuesta.

3. (0,15 puntos) Sea A una matriz simétrica $d \times d$, estrictamente definida positiva, y sea $v \in \mathbb{R}^d$ un vector cualquiera. Demuestra que el funcional $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definido por
$$F(x) := \langle Ax, x \rangle - \langle x, v \rangle$$
alcanza un único mínimo en $\mathbb{R}^d$, y no alcanza ningún máximo.

Ejercicio 2 (0,5 puntos)**.** Sea $\Omega := (0, 1) \times (0, 2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideramos la ecuación en derivadas parciales
$$\Delta u(x, y) = -\lambda u(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega,$$
donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro, y con condición de contorno
$$u(x, y) = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial\Omega.$$
Encuentra todas las posibles soluciones clásicas en variables separadas (es decir, de la forma $u(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$) de la ecuación anterior, para todos los posibles valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3 (0,5 puntos)**.** Sea $\Omega := (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideramos la ecuación en derivadas parciales
$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_x \partial_y u = e^x e^y & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

1. Enuncia una definición razonable de solución clásica para esta ecuación.
2. Enuncia una definición razonable de solución débil para esta ecuación.
3. Usando estas definiciones, demuestra que una solución clásica es también una solución débil.
4. Demuestra que existe una única solución débil de la ecuación, en el sentido de la definición que acabas de dar.