



Universidad de Granada

Matemática Aplicada

Modelos Matemáticos II
Grado en Matemáticas

Prueba de clase
5 de mayo de 2022

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto). 1. (0,4 puntos) Demuestra que el funcional $\mathcal{F}: D \rightarrow \mathbb{R}$, definido en el dominio

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0, 1] \mid y(0) = 1, y(1) = 2\}$$

dado por

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^1 |y'(x)|^3 dx$$

alcanza un mínimo, y encuentra todas las funciones donde lo alcanza.

2. (0,4 puntos) Demuestra que el funcional \mathcal{G} en el mismo dominio, definido por

$$\mathcal{G}(y) := \int_0^1 y(x)^3 dx$$

no es cóncavo ni convexo, y que \mathcal{G} no tiene mínimo en D .

3. (0,2 puntos + 0,3 extra) Demuestra que el funcional \mathcal{H} en el mismo dominio, definido por

$$\mathcal{H}(y) := \int_0^1 (y'(x))^3 dx$$

no tiene mínimo en D . ¿Cuáles son sus puntos críticos?

Ejercicio 2 (1 punto). Consideramos el funcional $\mathcal{F}: D \rightarrow \mathbb{R}$, definido en el dominio

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[-1, 1] \mid y(-1) = y(1) = 0, \int_{-1}^1 y(x)^2 dx = 1\}$$

dado por

$$\mathcal{F}(y) := \int_{-1}^1 |y'(x)|^2 dx.$$

Demuestra que \mathcal{F} alcanza un mínimo, encuentra todas las funciones donde lo alcanza, y calcula su valor en el mínimo.

Ejercicio 3 (1 punto). Consideramos la ecuación de ondas

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u \tag{1}$$

para una función $u = u(t, x)$, en el dominio $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Consideramos una función $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$, con f no negativa ($f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

1. Demuestra que hay soluciones de (1) que cumplen $u(0, x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y que son además no negativas: $u(t, x) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Demuestra que hay soluciones de (1) que cumplen $u(0, x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y que además cambian de signo: $u(t, x) > 0$ para algunos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y $u(t, x) < 0$ para algunos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.