Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Convocatoria Junio
24–Junio–2016

MODELOS MATEMÁTICOS II
GRADO MATEMÁTICAS
Y DOBLE GRADO CON ING. INFORMÁTICA

EJERCICIO 1. Sea $I=(-1,1)$ y se definen $a(u,v)=\displaystyle\int_I u''(x)v''(x)\,dx$ y $F(v)=\displaystyle\int_I f\,v\,dx$, donde f viene dada por

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } -1\le x\le 0,\\ \frac{1}{2}(1-x), & \text{si } 0<x\le 1.\end{cases}$$

Se considera el problema de encontrar $u\in H_0^2(I)$ tal que[1]

$$a(u,v)=F(v),\quad \forall v\in H_0^2(I). \tag{1}$$

1.a) ¿Está f en $L^2(I)$? ¿Tiene derivada débil en $L^2(I)$? ¿Tiene derivada débil en algún otro espacio? En caso afirmativo, calcúlala y enuncia el concepto de derivada débil que estás usando.

1.b) Usando apropiadamente la desigualdad de Poincaré, demuestra que existe una constante $\alpha>0$ tal que

$$a(v,v)\ge \alpha\|v\|^2_{H^2(I)}.$$

1.c) Demuestra que $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal y continua en $H^2(I)\times H^2(I)$. Demuestra que F es lineal y continua en $H^2(I)$.

1.d) Estudia la existencia y unicidad de (1) en $H_0^2(I)$.

1.e) Determina justificadamente qué relación hay entre las soluciones de (1) en $H_0^2(I)$ y las de

$$\mathcal{F}[u]=\min_{v\in H_0^2(I)}\{\mathcal{F}[v]\},\qquad \text{con } \mathcal{F}[v]=\frac{1}{2}a(v,v)-F(v). \tag{2}$$

1.f) Si $u\in H_0^2(I)$ es una solución de (2), determina justificadamente las condiciones de regularidad sobre u que necesitas para deducir la ecuación de Euler-Lagrange asociada. Escribe dicha ecuación y sus condiciones de contorno.

Solución. 1.a) Primero notamos que f está acotada, ya que $|x+1|<1$ cuando $x\in[-1,0]$ y $\frac{1}{2}|1-x|<\frac{1}{2}$ cuando $x\in(0,1]$. Por lo tanto, cualquier potencia suya es integrable en un intervalo compacto, en particular

$$\int_I |f(x)|^2dx\le\int_I 1dx=|I|=2<\infty.$$

Ahora pasamos a calcular su derivada. Tomamos $\phi\in C_0^1(I)$ y calculamos

$$\int f(x)\phi'(x)dx = \int_{-1}^0 (x+1)\phi'(x)dx+\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)\phi'(x)dx \overset{partes}{=} = -\int_{-1}^0\phi(x)dx+\int_0^1\frac{1}{2}\phi(x)dx+\frac{1}{2}\phi(0).$$

Por lo tanto $f'=g-\frac{1}{2}\delta_0$ donde $g(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0,\\ -\frac{1}{2}, & 0<x\le 1,\end{cases}$ y δ_0 es la Delta de Dirac (que NO es una función de $L^1_{loc}(I)$. Por lo tanto f no tiene derivada débil.

[1] Recuérdese que los elementos del espacio de Hilbert $H^2(I)$ son las funciones $u\in L^2(I)$ cuyas derivadas débiles hasta orden dos existen y pertenecen a $L^2(I)$. La siguiente expresión define una norma en $H^2(I)$:

$$\|u\|^2_{H^2(I)}=\|u\|^2_{L^2(I)}+\|u'\|^2_{L^2(I)}+\|u''\|^2_{L^2(I)}.$$

1.b) Para probar la coercividad de a usamos la desigualdad de Poincaré tanto para $v \in H_0^2 \subseteq H_0^1$ como para su derivada, ya que $v' \in H_0^1$, obteniendo $\|v\|_{L^2}^2 \leq C\|v'\|_{H^1}^2$ y $\|v'\|_{L^2}^2 \leq C\|v''\|_{H^1}^2$. Combinándolas, obtenemos,

$$\|v\|_{H^2(I)}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2 \leq (C+1)\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2(I)}^2 \leq (C(C+1)+1)\|v''\|_{L^2}^2,$$

que es la desigualdad buscada con $\alpha = (C(C+1)+1)^{-1}$, ya que $a(v,v) = \|v''\|_{L^2(I)}^2$.

1.c) Las liberalidades de a y f son consecuencia inmediata de cuatro hechos: la integral es lineal, derivar es lineal, el producto es bilineal, y el producto por una función fija es lineal. La continuidad también es bastante obvia (una vez comprobado en 1.a) que f es L^2) usando Cauchy-Schwartz

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}, \qquad |F(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^2}.$$

1.d) La existencia y unicidad de solución del problema (1) en $H_0^2(I)$ es consecuencia del Teorema de Lax-Milgram, cuyas hipótesis son precisamente lo que se ha verificado en los apartados anteriores.

1.e) La segunda parte del Teorema de Lax-Milgram relaciona estos problemas en el caso en que a sea simétrica, que es, trivialmente, nuestro caso. Concretamente dice que si a es simétrica, (1) y (2) poseen la misma única solución.

1.f) Para responder, realizamos primero los cálculos necesarios para obtener la ecuación de E–L. Tomamos una función $\phi \in C_0^\infty(I)$ cualquiera y llamamos $g(s) := \mathcal{F}[u+s\phi]$ (notamos que $u+s\phi$ sigue estando en $H_0^2(I)$), de modo que g alcanza un mínimo en $s=0$ y podemos escribir $g'(0)=0$. Realizamos este cálculo:

$$g'(s) = \frac{d}{ds}\int_I \Big(\frac{1}{2}(u''+s\phi'')^2 - f(u+s\phi)\Big)dx = \int_I \Big((u''+s\phi'')\phi'' - f\phi\Big)dx$$

por lo que $g'(0)=0$ queda $0 = \int_I (u''\phi'' + f\phi)dx$. Haciendo en la primera integral dos integraciones por partes, para quitarle las dos derivadas a la función ϕ, queda

$$0 = \int_I (u''\phi'' - f\phi)dx = \Big[u''\phi'\Big]_{-1}^1 - \Big[u'''\phi\Big]_{-1}^1 + \int_I (u'''' - f)\phi\,dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I).$$

El segundo sumando es cero, puesto que ϕ se anula en los extremos del intervalo, pero para anular el primero, hemos de añadir condiciones nulas de la derivada segunda. Dado que también necesitamos usar la derivada cuarta, concluimos que: "Si $u \in C^4(I)$ es el mínimo de $\mathcal{F}$ cumpliendo las condiciones de contorno $u(-1)=u(1)=u''(-1)=u''(1)=0$, entonces cumple la ecuación: $u''''(x) = f(x)$".

EJERCICIO 2. Sea $I = \big[0, 2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big]$. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_I \Big(1+\frac{x}{2}\Big)^2 \big(y'(x)\big)^2\,dx \quad \text{en} \quad \mathcal{D} = \Big\{y \in C^1[I];\ \int_I y(x)^2\,dx = 1,\ \int_I y(x)\phi(x)\,dx = 0\Big\},$$

siendo $\phi \in C^1[I] \cap C^2(I)$ una solución no nula del problema de contorno

$$\Big(\Big(1+\frac{x}{2}\Big)^2\phi'\Big)' + \Big(\frac{1}{16}+1\Big)\phi = 0\,, \quad \phi'(0) = \phi'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big) = 0\,. \tag{3}$$

Calcula de forma justificada el mínimo, si existe, de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2(I)$.

Solución. Antes de aplicar el teorema general de problemas variacionales con restricciones integrales (que podría conllevar cierta dificultad) observamos que la primera restricción es una normalización y la segunda es de ortogonalidad a la función ϕ, de modo que podría ser de aplicabilidad el teorema de formulación variacional de problemas de Sturm-Liouville. Por lo tanto, tomamos $0 < P(x) = (1+x/2)$, $Q(x)=0$ y $S(x)=1$ y nos planteamos:

$$\mathcal{F}[y] := \int_I \Big(1+\frac{x}{2}\Big)^2 \big(y'(x)\big)^2\,dx \quad \text{en} \quad \mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \Big\{y \in C^1[I];\ \int_I y(x)^2\,dx = 1\Big\},$$

cuyo problema de S-L asociado es $(Py')' + \lambda y = 0$, con y' nula en los extremos del intervalo (recordamos que, al no haber condiciones de contorno en $\mathcal{D}_S$, la condición es $F_p = 0$ y en este caso se obtiene $Py' = 0$, es decir, condiciones Newmann homogéneas). Pasamos pues a resolver este problema de S-L

$$\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 y'\right)' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = y'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big) = 0\,. \tag{4}$$

Como es una ecuación e tipo Euler, hacemos el cambio de variable estándar: $\boxed{(1+\frac{x}{2}) = e^t}$, de donde

$$z(t) = y(x), \;\;\Rightarrow\;\; z'(t) = y'(x)2e^t, \;\;\Rightarrow\;\; z''(t) = y''(x)4e^{2t} + y'(x)2e^t,$$

y, sustituyendo, obtenemos la ecuación (4):

$$0 = (1+\frac{x}{2})^2 y'' + (1+\frac{x}{2})y' + \lambda y = \frac{z''}{4} - e^t\frac{y'}{2} + e^t y' + \lambda z = \frac{1}{4}(z'' + z' + 4\lambda z) \tag{5}$$

y las condiciones de contorno:

$$y'(0) = y'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; z'(0) = z'\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0. \tag{6}$$

Para calcular los posibles valores propios, determinamos las raíces del polinomio característico: $p(\mu) := \mu^2 + \mu + 4\lambda$, que son

$$\mu_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16\lambda}}{2},$$

lo que nos plantea los siguientes casos:

$\boxed{16\lambda < 1}$ En este caso las dos raíces son reales y las soluciones de la ecuación (5) son $z(t) = Ae^{\mu_+ t} + Be^{\mu_- t}$, pero al imponer las condiciones de contorno (6) sólo obtenemos la solución nula.

$\boxed{16\lambda = 1}$ En este caso hay una única raíz real $\mu = -1/2$ doble, y las soluciones de la ecuación (5) son $z(t) = Ae^{-t/2} + Bte^{-t/2}$, pero al imponer las condiciones de contorno (6) sólo obtenemos la solución nula.

$\boxed{16\lambda > 1}$ En este caso hay dos raíces complejas conjugadas, y las soluciones de la ecuación (5) son

$$z(t) = e^{-t/2}\Big(A\cos(\beta t) + B\operatorname{sen}(\beta t)\Big), \qquad \textit{donde} \qquad \beta := \frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}$$

Calculamos su derivada,

$$z'(t) = \frac{-1}{2}e^{-t/2}\Big(A\cos(\beta t) + B\operatorname{sen}(\beta t)\Big) + \beta e^{-t/2}\Big(- A\operatorname{sen}(\beta t) + B\cos(\beta t))\Big)$$

para imponer las condiciones de contorno (6):

$$\frac{-1}{2}A + \beta B = 0, \qquad A\Big(\frac{-1}{2}\cos(\beta\frac{\pi}{2}) - \beta\operatorname{sen}(\beta\frac{\pi}{2})\Big) + B\Big(\frac{-1}{2}\operatorname{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) + \beta\cos(\beta\frac{\pi}{2})\Big) = 0.$$

Si observamos estas igualdades como ecuaciones en A y B, la existencia de soluciones no nulas equivale a que la matriz de coeficientes no sea regular. Por ello, calculamos su determinante e igualamos a cero, obteniendo:

$$\frac{-1}{2}\Big(\frac{-1}{2}\operatorname{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) + \beta\cos(\beta\frac{\pi}{2})\Big) - \beta\Big(\frac{-1}{2}\cos(\beta\frac{\pi}{2}) - \beta\operatorname{sen}(\beta\frac{\pi}{2})\Big) = \Big(\frac{1}{4} + \beta^2\Big)\operatorname{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) = 0.$$

De donde deducimos finalmente los valores propios:

$$\operatorname{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \beta\frac{\pi}{2} = n\pi \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4} = n \Leftrightarrow \boxed{\lambda_n = n^2 + \frac{1}{16}},\;\; n = 1, 2, 3, ...$$

Hemos tenido suerte, el problema de contorno (3) verificado por ϕ coincide con la ecuación (4) para el valor $\lambda = 1 + \frac{1}{16} = \lambda_1$, es decir, ϕ es la primera función propia del problema S-L que estamos estudiando. Por lo tanto, según el teorema estudiado en clase, el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ se alcanza en la segunda función propia (que habría que terminar de calcular, si me la pidieran) y su valor es $\mathcal{F}[y_2] = \lambda_2 = 4 + \frac{1}{16}$.

EJERCICIO 3. Encuentra explícitamente la solución $u = u(t, x)$ del siguiente problema de Cauchy para la ecuación de ondas, planteado en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u \quad \text{en } (0,\infty) \times (0, 2\pi), \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \quad \text{para } t \in (0,\infty), \\ u(0,x) = |x-\pi| - \pi \quad \text{para } x \in [0,2\pi], \\ \partial_t u(0,x) = \operatorname{sen}(2x) \quad \text{para } x \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Solución. Esbozamos los pasos teóricos dados en clase. Primero buscamos soluciones no nulas en variables separadas $u(t, x) = T(t)W(x)$. Al imponer estos perfiles se obtienen sendos problemas

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad y \quad W''(x) + \lambda W(x) = 0, \ \ con\ W(0) = W(2\pi) = 0.$$

Al resolver el problema de S-L en x, obtenemos la sucesión de autovalores $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$ y autofunciones (soluciones no nulas) $W_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{nx}{2})$. Al sustituir los λ_n en la ecuación de T, obtenemos finalmente una familia de funciones soluciones de la ecuación de ondas con las condiciones de contorno:

$$u_n(t,x) = T_n(x)W_n(x) = \Big(A\cos\big(\frac{nt}{2}\big) + B\operatorname{sen}\big(\frac{nt}{2}\big)\Big)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big).$$

Usando el principio de superposición, proponemos la solución de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1}\Big(A_n\cos\big(\frac{nt}{2}\big) + B_n\operatorname{sen}\big(\frac{nt}{2}\big)\Big)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big),$$

e imponemos las condiciones iniciales para calcular los coeficientes A_n y B_n.

$$u(0,x) = \sum_{n\geq 1} A_n \operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big) = |x-\pi| - \pi, \qquad \partial_t u(0,x) = \sum_{n\geq 1}\frac{nB_n}{2}\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big) = \operatorname{sen}(2x).$$

En este caso, deducimos inmediatamente $B_4 = 1/2$ y $B_n = 0$ para $n \neq 4$, pero para determinar los A_n necesitamos la serie de Fourier de $u_0(x) = |x - \pi| - \pi$, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como sabemos es

$$u_0(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big), \quad donde \ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big),$$

por lo que simplemente nos resta calcular los a_n y escribir $A_n = a_n$.

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_0^{2\pi} u_0(x)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)dx = \int_0^{\pi}(-x)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)dx + \int_\pi^{2\pi}(x-2\pi)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)dx \overset{partes}{=} \\
&= -\int_0^{\pi}\frac{2}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)dx - \Big[\frac{2x}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_0^{\pi} + \int_\pi^{2\pi}\frac{2}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)dx - \Big[\frac{2(x-2\pi)}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_\pi^{2\pi} \\
&= -\Big[\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_0^{\pi} - \Big(\frac{2\pi}{n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) + \Big[\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_\pi^{2\pi} + \Big(\frac{2\pi}{n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) \\
&= -\Big(\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) - \Big(\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) = \frac{-8}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big).
\end{aligned}$$

Como vemos que $a_n = 0$ si n es par, reenumeramos sólo los impares $n = 2k - 1$, de modo que

$$\pi a_{2k-1} = \frac{-8}{(2k-1)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{(2k-1)\pi}{2}\big) = \frac{-8}{(2k-1)^2}(-1)^{k+1} = \frac{8}{(2k-1)^2}(-1)^k.$$

Para concluir, simplemente escribimos la solución obtenida:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\cos\big(\frac{(2k-1)t}{2}\big)\,\mathrm{sen}\big(\frac{(2k-1)x}{2}\big).$$

EJERCICIO 4. Consideramos cuatro sustancias químicas X, Y, A, B que interactúan según las siguientes reacciones:

$$A \underset{k_1}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} X\,, \quad B \overset{k_4}{\to} Y\,, \quad X+X+Y \overset{k_3}{\to} X+X+X$$

donde k_1, k_2, k_3, k_4 son constantes positivas que indican la velocidad a la que ocurre cada reacción. Denotamos por x, y, a, b las concentraciones de cada una de estas sustancias químicas. Suponemos que tenemos una mezcla homogénea, de forma que x, y, a, b dependen únicamente del tiempo t. Suponemos también que las concentraciones a, b son constantes independientes del tiempo.

4.a) Usando la ley de acción de masas, escribe el sistema de ecuaciones que satisfacen x, y.

4.b) Para $\alpha, \lambda > 0$ dadas consideramos el cambio de variables

$$u(\tau) := \frac{1}{\lambda}x(\alpha\tau), \qquad v(\tau) := \frac{1}{\lambda}y(\alpha\tau).$$

- Encuentra α, λ en función de k_1, k_2, k_3, k_4, a, b de forma que el sistema resultante para u, v sea de la forma
$$\begin{cases} u' = 1 - \gamma u + u^2 v, \\ v' = \beta - u^2 v. \end{cases} \tag{7}$$
- Encuentra β, γ en función de k_1, k_2, k_3, k_4, a, b.

4.c) Calcula el (único) estado de equilibrio (es decir, la solución constante en tiempo) de la ecuación (7) en función de γ y β.

Solución. 1.a) Aplicando la LAM para las concentraciones de X e Y (y no para A y B, que permanecen constantes), obtenemos:

$$x'' = k_2 a - k_1 x + 3k_3 x^2 y - 2k_3 x^2 y = k_2 a - k_1 x + k_3 x^2 y, \qquad y' = k_4 b - k_3 x^2 y.$$

4.b). Derivamos el cambio de variable dado, y usamos las ecuaciones previas, para obtener:

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= \frac{\alpha}{\lambda}x'(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\Big(k_2 a - k_1 x + k_3 x^2 y\Big) = \frac{\alpha k_2 a}{\lambda} - \alpha k_1 \frac{x}{\lambda} + \alpha k_3 \lambda^2 \frac{x^2}{\lambda^2}\frac{y}{\lambda} = \frac{\alpha k_2 a}{\lambda} - \alpha k_1 u + \alpha k_3 \lambda^2 u^2 v \\ v'(\tau) &= \frac{\alpha}{\lambda}y'(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\Big(k_4 b - k_3 x^2 y\Big) = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} - \alpha k_3 \lambda^2 \frac{x^2}{\lambda^2}\frac{y}{\lambda} = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} - \alpha k_3 \lambda^2 u^2 v \end{aligned}$$

Por lo tanto, imponiendo (7) e igualando coeficientes, nos queda

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha k_2 a}{\lambda} = 1, \\ \alpha k_3 \lambda^2 = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{k_2^2 a^2 k_3}}, \quad y \quad \lambda = \sqrt[3]{\frac{k_2 a}{k_3}},$$

y las dos constantes restantes son simplemente

$$\gamma = \alpha k_1 = \sqrt[3]{\frac{k_1^3}{k_2^2 a^2 k_3}}, \quad y \quad \beta = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} = \frac{k_4 b}{k_2 a}.$$

4.c) Simplemente resolvemos

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \gamma u + u^2 v = 0, \\ \beta - u^2 v = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow u_{eq} = \frac{1+\beta}{\gamma}, \quad y \quad v_{eq} = \frac{\beta\gamma^2}{(1+\beta)^2}.$$