Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Examen de diciembre** 19 diciembre de 2016

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1. Responde justificadamente a las siguientes cuestiones:

1. Consideramos la función $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

   ¿Tiene f una derivada primera en sentido débil? ¿Y una derivada segunda en sentido débil?

2. Sea $I = (a,b)$ un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$, y $a\colon H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ la forma bilineal

$$a(u,v) := \int_I u'v' + \int_I uv, \qquad u,v \in H_0^1(I).$$

   ¿Cumple esta forma bilineal las condiciones que aparecen el el Teorema de Lax-Milgram?

3. Consideramos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\left.\begin{aligned} \partial_{tt}u = \partial_{xx}u - u \qquad & \text{en } (0,+\infty)\times(0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \qquad & \text{para todo } t \ge 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

   con condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(0,x) = 0 \qquad & \text{para todo } x \in [0,1], \\ \partial_t u(0,x) = x(1-x) \qquad & \text{para todo } x \in [0,1], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

   donde la incógnita u es una función definida en $[0,+\infty)\times[0,1]$. Usando el siguiente funcional de energía

$$E(u)(t) := \int_0^1 (\partial_t u(t,x))^2\,dx + \int_0^1 (\partial_x u(t,x))^2\,dx + \int_0^1 u(t,x)^2\,dx$$

   demuestra que la solución del problema (1) con condición inicial (2) es única.

Solución 0.1.

1. Tanto f como su primera derivada (en sentido clásico) son funciones absolutamente continuas. Sabemos que cualquier función absolutamente continua en un intervalo tiene una derivada débil que coincide con su derivada clásica en casi todo punto. Por tanto, f tiene derivadas débiles de primer y segundo orden.

2. Sí, ya que es:

   a) Bilineal (lineal en cada argumento, como se comprueba fácilmente).

   b) Continua: por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|a(u,v)| \le 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$.

   c) Coerciva: $a(u,u) = \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2 = \|u\|_{H^1}^2$.

3. Se comprueba que para cualquier solución u de (1) la derivada con respecto a t de $E(u)(t)$ es 0, luego $E(u)(t)$ es constante en tiempo. Si u, v son dos soluciones del problema (1)–(2), entonces por linealidad $w := u - v$ es una solución de (1), pero con condición inicial 0 tanto para u como para $\partial_t u$. Por tanto, $E(w)(0) = 0$, y como $E(w)$ es constante en tiempo deducimos que $E(w)(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. En particular,

$$\int_0^1 (u(t,x) - v(t,x))^2 \, dx = 0 \qquad \text{para todo } t \geq 0,$$

lo cual implica que $u(t,x) = v(t,x)$ para todo $(t,x) \in [0,+\infty) \times [0,1]$ (ya que u, v son funciones continuas).

Ejercicio 2. Se considera el problema de minimización $\mathcal{F}[u] = \inf_{y \in \mathcal{D}} \mathcal{F}[y]$, con

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 e^x \left(\left(y'(x)\right)^2 + \left(y(x)\right)^2 \right) dx$$

definido en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1[0,1]; \ \int_0^1 e^x y(x)^2 \, dx = 1, \ \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} y(x) \operatorname{sen}(\pi x) \, dx = 0 \right\}.$$

1. Calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange (en forma autoadjunta) y las condiciones de contorno asociadas al problema de minimización si $y \in \mathcal{D} \cap C^2[0,1]$.

2. Calcula de forma justificada el mínimo, si existe, de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2[0,1]$ e indica en qué función se alcanza dicho mínimo.

Solución 0.2. Es sencillo (y está hecho en clase) verificar que el multiplicador de Lagrange asociado a la segunda ligadura acaba por anularse, luego basta con introducir el funcional corregido

$$F^\star(x,y,p) = e^x(p^2 + y^2) + \lambda e^x y^2 = e^x\left(p^2 + (1+\lambda)y^2\right)$$

y calcular su ecuación de Euler–Lagrange asociada, $F_y^\star - \frac{d}{dx}(F_p^\star) = 0$, donde hemos denotado $p = y'$. Obtenemos

$$0 = 2(1+\lambda)e^x y - \frac{d}{dx}(2e^x p) = 2(1+\lambda)e^x y - 2e^x y' - 2e^x y''$$

o, equivalentemente,

$$\left(e^x y'\right)' - (1+\lambda)e^x y = 0 \tag{3}$$

en versión autoadjunta. Por otra parte, las condiciones de contorno son en este caso $y(0) = y(1) = 0$, pues $\mathcal{D} \subset C_0^1[0,1]$. Esto resuelve el primer apartado del problema.

Para calcular el mínimo del funcional, comenzamos por encontrar los valores propios y las funciones propias del problema de contorno anterior. Con tal fin escribimos la ecuación de Euler-Lagrange en su forma normal, $y'' + y' - (1+\lambda)y = 0$, y la resolvemos. Las soluciones de la ecuación característica asociada son

$$\mu_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1+\lambda)}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \lambda},$$

por lo que cabe distinguir los casos $\lambda = -\frac{5}{4}$, $\lambda < -\frac{5}{4}$ y $\lambda > -\frac{5}{4}$. Si $\lambda = -\frac{5}{4}$, la solución general es de la forma $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bxe^{-\frac{x}{2}}$, y al aplicar las condiciones de contorno resulta $A = B = 0$, luego la única solución posible en este caso es la trivial. Si $\lambda > -\frac{5}{4}$, entonces $\mu_\pm$ son reales y distintas, luego la solución general es $y(x) = Ae^{\mu_+ x} + Be^{\mu_- x}$, que vuelve a dar $A = B = 0$ tras aplicar las condiciones de contorno. Finalmente, si $\lambda < -\frac{5}{4}$ la solución general se expresa de la siguiente forma:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos\left(\sqrt{-\frac{5}{4} - \lambda}\, x\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{5}{4} - \lambda}\, x\right) \right). \tag{4}$$

Al aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$y(0) = A = 0, \quad y(1) = e^{-\frac{1}{2}} \left(A \cos\left(\sqrt{-\frac{5}{4} - \lambda}\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{5}{4} - \lambda}\right) \right) = 0,$$

de donde se desprende que ha de ser $B\operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{5}{4}-\lambda}\right) = 0$, que solo proporciona soluciones no triviales cuando $\sqrt{-\frac{5}{4}-\lambda} = n\pi$ o, equivalentemente,

$$\lambda_n = -\frac{5}{4} - n^2\pi^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Por otra parte, atendiendo a la expresión (4) puede deducirse que las funciones propias asociadas a los valores anteriores son de la forma

$$\phi_n(x) = Be^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(n\pi x)\,, \quad B \in \mathbb{R}\,.$$

Si atendemos a la forma autoadjunta de la ecuación de Euler-Lagrange, $(p(x)y')' + q(x)y + \mu r(x)y = 0$ (cf. Eq. (3) con $p(x) = r(x) = e^x$, $q(x) = -e^x$, $\mu = -\lambda$), las ligaduras del problema son exactamente

$$\int_0^1 r(x)y(x)^2\,dx = 1\,, \quad \int_0^1 r(x)\phi_1(x)y(x)\,dx = 0\,,$$

y por un teorema de clase se deduce que el mínimo de $\mathcal{F}[y]$ se alcanza en $\phi_2(x) = \pm\sqrt{2}\,e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(2\pi x)$ (nótese que $B = \pm\sqrt{2}$ son los únicos valores de B que hacen que ϕ_2 satisfaga la primera ligadura) y vale $\mathcal{F}[\phi_2] = -\lambda_2 = \frac{5}{4} + 4\pi^2$.

Ejercicio 3. Sea Ω el abierto

$$\Omega := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2\right\}.$$

Supongamos que $u = u(t, x)$ es una solución del siguiente problema de contorno para la ecuación del calor en $[0, +\infty) \times \overline{\Omega}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t u = \Delta u & \text{en } [0,+\infty)\times\Omega. \\ u(t,x) = 1 & \text{para todo } t \geq 0,\ x = (x_1,x_2,x_3) \in \partial\Omega \text{ con } \sqrt{x_1^2+x_2^2} = 1. \\ u(t,x) = 2 & \text{para todo } t \geq 0,\ x = (x_1,x_2,x_3) \in \partial\Omega \text{ con } \sqrt{x_1^2+x_2^2} = 2. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Suponemos además que u es de la forma $u(t,x) = \phi(t,r) = \phi(t, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ para cierta función $\phi\colon [0,+\infty) \times [1,2] \to \mathbb{R}$, para todo $t \geq 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ (donde llamamos $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$).

1. ¿Cuál es la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer la función $\phi = \phi(t,r)$?
2. Encuentra una solución estacionaria (es decir, que no depende del tiempo) de la ecuación (5).

Solución 0.3. 1. Usando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{gathered} \partial^2_{x_1} u = \frac{x_1^2}{r^2}\partial_r^2\phi + \frac{1}{r}\partial_r\phi - \frac{x_1^2}{r^3}\partial_r\phi, \\ \partial^2_{x_2} u = \frac{x_2^2}{r^2}\partial_r^2\phi + \frac{1}{r}\partial_r\phi - \frac{x_2^2}{r^3}\partial_r\phi, \\ \partial^2_{x_2} u = 0, \end{gathered}$$

y sumando las tres líneas obtenemos

$$\Delta u = \partial_r^2\phi + \frac{1}{r}\partial_r\phi.$$

Como $\partial_t\phi = \partial_t u$, finalmente tenemos

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t\phi = \partial_r^2\phi + \dfrac{1}{r}\partial_r\phi & \text{en } [0,+\infty)\times(1,2). \\ \phi(t,1) = 1 & \text{para todo } t \geq 0, \\ \phi(t,2) = 2 & \text{para todo } t \geq 0. \end{array}\right.$$

2. Buscamos una solución estacionaria de la forma dada en el ejercicio. Es decir, una función $\psi = \psi(r)$ que cumpla

$$0 = \psi'' + \frac{1}{r}\psi' \qquad \text{en } (1,2).$$
$$\psi(1) = 1, \quad \psi(2) = 2.$$

La solución general de la ecuación ordinaria es $\psi(r) = A + B\log r$, y las condiciones de contorno dan $A = 1$, $B = 1/\log 2$. Luego

$$\psi(r) = 1 + \frac{\log r}{\log 2}, \qquad 1 \le r \le 2.$$

Por tanto la solución que obtenemos es

$$u(t,x) = 1 + \frac{\log(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{\log 2}, \qquad x \in \overline{\Omega},\ t \ge 0.$$

Ejercicio 4. Se pretende describir matemáticamente la evolución de una población de insectos herbívoros, cuyo tamaño denotamos $I(t)$, en función de la calidad de la planta de la que se alimentan, denotada $c(t)$. Es conocido que valores pequeños de $c(t)$ se traducen en alta toxicidad de la planta, en tanto que valores grandes de $c(t)$ indican que la planta es buena para el consumo del insecto. Si a esto añadimos que la calidad de la planta (como nutriente) se ve reforzada cuando la cantidad de insectos es baja o moderada y desciende en caso contrario, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$c'(t) = K_1 - K_2 c(t) I(t)(I(t) - I_0)$$
$$I'(t) = K_3 I(t)\Big(1 - K_4 \frac{I(t)}{c(t)}\Big)$$

(a) Explica las ecuaciones y sugiere posibles significados para las constantes positivas K_1, K_2, K_3, K_4 e I_0.

(b) Prueba que la introducción de las variables adimensionales

$$x(\tau) = \frac{1}{K_4 I_0} c\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big), \quad y(\tau) = \frac{1}{I_0} I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big),$$

conduce a que las ecuaciones del modelo puedan reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 - Kx(\tau)y(\tau)(y(\tau) - 1)$$
$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha y(\tau)\Big(1 - \frac{y(\tau)}{x(\tau)}\Big)$$

donde $K = \frac{K_2 K_4 I_0^3}{K_1}$ y $\alpha = \frac{K_3 K_4 I_0}{K_1}$.

(c) Demuestra que el modelo admite un único punto de equilibrio.

Solución 0.4. (a) K_1 es el ritmo al que aumenta la calidad de la planta en ausencia de insectos que se alimenten de ella; I_0 representa el número crítico de insectos a partir del cual la calidad de la planta comienza a descender; K_2 es el ritmo al que crece o disminuye la calidad de la planta en función de la presencia más o menos numerosa de insectos; K_3 es el ritmo de crecimiento intrínseco de la población de insectos; K_4 es un factor que contribuye a limitar el crecimiento de insectos en función de la calidad de la planta.

La primera ecuación explica cómo la presencia de insectos altera la calidad de la planta, haciéndola aumentar si $I < I_0$ y disminuir en caso contrario. Por otra parte, la segunda ecuación dibuja una ley de tipo logístico para explicar el crecimiento de la población de insectos, limitada en este caso por la calidad de la planta.

(b) Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{K_4 I_0} c'\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\Big) \\
&= \frac{1}{K_1}\left[K_1 - K_2 c\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big) I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)\Big(I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big) - I_0\Big)\right] \\
&= 1 - \frac{K_2}{K_1} c\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big) I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)\Big(I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big) - I_0\Big) \\
&= 1 - \frac{K_2 K_4 I_0^3}{K_1} x(\tau) y(\tau)(y(\tau) - 1)\,.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{I_0} c'\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\Big) \\
&= \frac{K_4}{K_1}\left[K_3 I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)\left(1 - K_4 \frac{I\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)}{c\Big(\frac{K_4 I_0}{K_1}\tau\Big)}\right)\right] \\
&= \frac{K_4 K_3 I_0}{K_1} y(\tau)\Big(1 - \frac{y(\tau)}{x(\tau)}\Big)\,.
\end{aligned}$$

(c) Los puntos de equilibrio son las soluciones constantes, es decir, aquellas que no cambian con el tiempo. Por consiguiente, para encontrarlos basta con igualar a cero las correspondientes derivadas temporales y resolver el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned}
1 - Kxy(y-1) &= 0 \\
y\Big(1 - \frac{y}{x}\Big) &= 0
\end{aligned}$$

de donde se sigue que ha de ser $y = x$ (para que se satisfaga la segunda ecuación, pues la alternativa $y \equiv 0$ no resuelve la primera). En tal caso, la primera ecuación se lee $1 - Ky^2(y-1) = 0$. Lo que el ejercicio nos pide, pues, es verificar que la ecuación $y^2(y-1) = \frac{1}{K} > 0$ admite una única solución. Es claro que no puede haber soluciones en el rango $0 \le y \le 1$. Por tanto, debe comprobarse que solo hay un valor $y > 1$ que resuelve $y^3 - y^2 - \frac{1}{K} = 0$. En efecto, si el polinomio $p(y) = y^3 - y^2 - \frac{1}{K}$ tuviese m·s de un cero en $(1, +\infty)$ tendría que cambiar su monotonía, pero $p'(y) = y(3y-2) > 0$ para cualquier $y \in (1, +\infty)$.

■