Universidad de Granada	**Prueba de clase**	MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada		DOBLE GRADO EN
Facultad de Ciencias	3–Mayo–2017	INFORMÁTICA & MATEMÁTICAS

$\boxed{1}$ Calcula las extremales del siguiente problema de la viga con extremos apoyados, es decir,

$$\text{mín}\, \mathcal{F}[u] := \int_0^2 \Big((u''(x))^2 - (u'(x))^2 - 2xu(x) \Big) dx, \quad con \quad u(0) = u''(0) = 0 = u(2) = u''(2).$$

Ayuda: La ecuación de Euler-Lagrange asociada tiene una solución de la forma $A\,x^3$.

$\boxed{\text{Solución}}$. Como es el problema de la viga resuelto en clase con $M = N = 2$, sabemos (o rehacemos las cuentas) que la ecuación de Euler-Lagrange asociada es $u'''' + u'' = x$. Una solución particular viene dada en la ayuda: $u_p(x) = Ax^3$ (por si alguien no recordaba la técnica de los coeficientes indeterminados) que, sustituyendo, da $A = 1/6$. Como el polinomio característico de esta EDO es $\lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(1 + \lambda^2)$, la solución general es:

$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + A + Bx + C\operatorname{sen}(x) + D\cos(x).$$

Imponemos ahora las condiciones de contorno $u(0) = u''(0) = 0 = u(2) = u''(2)$:

$$\begin{cases} u''(0) = D = 0, \\ u(0) = A + D = 0, \\ u''(2) = 2 - C\operatorname{sen}(2) - D\cos(2) = 0, \\ u(2) = 4/3 + A + 2B + C\operatorname{sen}(2) + D\cos(2) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0, \\ A = 0, \\ C = 2/\operatorname{sen}(2), \\ B = -5/3, \end{cases}$$

obteniendo una única extremal:

$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5x}{3} + \frac{2\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2)}.$$

$\boxed{2}$ Probar que la función *parte entera*, $E(x)$, puede escribirse como: $E(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, haciendo un desarrollo adecuado de $f(x) = x - E(x)$, que es 1-periódica.

$\boxed{\text{Solución}}$. Usando la sugerencia, vamos a calcular la serie de Fourier de x en $[0,1]$ (ya que en este intervalo $f(x) = x$). Aplicamos directamente las definiciones:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\cos\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big)dx = 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)dx = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\operatorname{sen}\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big)dx = 2\int_0^1 x\operatorname{sen}(2n\pi x)dx = \Big[\frac{-2x\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2n\pi x)}{n\pi}dx = \frac{-1}{n\pi}.$$

Por lo tanto, en el intervalo $[0,1]$

$$x = (x - E(x))\Big|_{[0,1]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big) + b_n\operatorname{sen}\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{n},$$

y, despejando se obtiene el resultado. Como la convergencia es puntual en $(0,1)$ (por ser x continua), pero falla en los extremos, la igualdad será cierta en todo $\mathbb{R}$ salvo los naturales, como reza el enunciado.

$\boxed{3}$ Dado el problema variacional:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}[y] := \int_0^1 \Big(y'(x)^2 + y(x)^2 \Big) dx \text{ en el conjunto } \mathcal{D} = \Big\{ y \in C_0^1(0,1) : \int_0^1 y^2(x)dx = 1 \Big\},$$

prueba que tiene solución, determinando el mínimo m y la función $\bar{y}$ sobre la cual lo alcanza.

$\boxed{\text{Solución}}$. En este caso, usaremos el teorema de caracterización variacional de valores y vectores propios. En este caso, con $P = 1$, $Q = -1$ y $S = 1$, sabemos que el problema de Sturm-Liouville asociado a este problema variacional es

$$y'' + (\lambda - 1)y = 0,\ x \in [0,1], \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

y que el mínimo se alcanza en la primera autofunción (normalizada) y es el primer autovalor. Resolvemos pues este problema de Sturm-Liouville. Como ha aparecido varias veces en clase, resumimos los pasos: no posee autovalores $(\lambda - 1) \leq 0$; para $(\lambda - 1) > 0$, la solución general es

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda - 1}x)$$

y, al imponer $y(0) = 0 = y(1)$ obtenemos $A = 0$ y $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda - 1}) = 0$, de donde deducimos los autovalores y las autofunciones:

$$\lambda_n = 1 + (n\pi)^2, \qquad y_n(x) = \mathrm{sen}(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto, la respuesta es:

$$m = \lambda_1 = 1 + \pi^2, \qquad \bar{y}(x) = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\sqrt{\int_0^1 \mathrm{sen}^2(\pi x)}}.$$

$\boxed{4}$ Dado el dominio de $\mathbb{R}^2$, $\Omega := (-1,1) \times (-1,1)$ y la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dedinida como

$$f(x) = |x|^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2)^{1/4},$$

determina si tiene derivadas parciales débiles y, según el resultado, indica si f está en algún $W^{1,p}(\Omega)$.

$\boxed{\text{Solución}}$. Como ya vimos en clase el cálculo de la derivada de una potencia, $\nabla|x|^\alpha = \alpha x|x|^{\alpha-2}$, lo omitimos aquí (en realidad lo hicimos en una bola redonda, que es más dificil de parametrizar; aquí se pueden repetir los cálculos sobre el cuadrado, y queda más sencillo). Como tanto f como $|\nabla f|$ son potencias, basta usar otro resultado de clase sobre integrabilidad de potencias dentro de bolas (o conjuntos que contengan al cero)

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \in L^p(Bola) \Leftrightarrow \alpha p < N.$$

Como, en este caso, como $N = 2$ y $f(x) = |x|^{(1/2)}$, f resulta estar en todos los $L^p(\Omega)$. Para su derivada obtenemos $|\nabla f(x)| = 1/2|x|^{-1/2}$, por lo que está sólo en los $L^p(\Omega)$ con $(1/2)p < 2$, es decir, $p < 4$. Juntando estos dos hechos, f tiene derivadas parciales débiles y $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p < 4$.

$\boxed{5}$ En función del valor m y la función $\bar{y}$ que resuelven el problema 3, encuentra la C más pequeña tal que

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq C \int_0^1 u'(x)^2 dx, \quad \text{para toda } u \in C_0^1(0,1),$$

y una función no nula que verifique la igualdad para la constante C obtenida.

$\boxed{\text{Solución}}$. Dada $0 \neq u \in C_0^1(0,1)$, definimos $y(x) = u(x)/\sqrt{\int_0^1 u^2(x)}$ que, al normalizarse, está en el conjunto $\mathcal{D}$ del ejercicio 3. Por lo tanto $\mathcal{F}[y] \geq m$, o, desarrollando

$$m \leq \mathcal{F}[y] = \frac{1}{\int_0^1 u(x)dx}\int_0^1 u'(x)^2 dx + 1, \Leftrightarrow (m-1)\int_0^1 u(x)dx \leq \int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

Dado que m es la constante óptima en 3, obtenemos $C = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{\pi^2}$ y la igualdad se obtiene en $u(x) = \bar{y}(x)$.