Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** **Soluciones** 10 de mayo de 2017

Ejercicio 1. Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones, y justifica brevemente tus respuestas:

1. El funcional $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 \left(e^{y(x)} + (y''(x))^2\right) \mathrm{d}x$ es convexo en $\mathcal{C}^2([0,1])$.
2. Si una función $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ tiene derivada débil en $L^1(0,1)$ entonces f es derivable en sentido clásico en casi todo punto de $(0,1)$.
3. Existe una función en $L^2([-\pi,\pi])$ cuyos coeficientes de Fourier son todos igual a 1.

Solución

1. Sí. Para verlo podemos usar la definición de convexidad: el funcional $\mathcal{F}$ tiene derivada direccional $\delta\mathcal{F}(y;v)$ para todo $y, v \in \mathcal{C}^2([0,1])$ y tenemos
$$\delta\mathcal{F}(y;v) = \int_0^1 (ve^y + 2y''v'') \leq \int_0^1 (e^{y+v} - e^y + (y''+v'')^2 - (y'')^2) = \mathcal{F}(y+v) - \mathcal{F}(y),$$
donde la desigualdad es debida a la convexidad de las funciones reales $a \mapsto a^2$, $a \mapsto e^a$.
2. No. Si una función tiene derivada débil entonces cualquier modificación de ella en un conjunto de medida nula tiene también la misma derivada débil.
3. No, por la identidad de Parseval: los cuadrados de los coeficientes de Fourier de una función L^2 forman una serie convergente.

Ejercicio 2. ¿Tiene el funcional $\mathcal{F}(y) = \int_{\pi/2}^{\pi} (y'(x))^2 \,\mathrm{d}x$ mínimo en
$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1([\frac{\pi}{2},\pi]) \mid y(\frac{\pi}{2}) = y(\pi) = 0,\ \int_{\pi/2}^{\pi} (y(x))^2 \,\mathrm{d}x = 2 \right\}?$$
Razona tu respuesta. En caso afirmativo calcúlalo.

Solución Este problema es de un tipo que hemos visto en clase. Sabemos que el problema de Sturm-Liouville asociado (las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema con restricción de tipo integral) es
$$y'' = -\lambda y, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = y(\pi) = 0. \tag{1}$$
El mínimo del funcional $\mathcal{F}$ se alcanza en la primera función propia de este problema, que calculamos de la manera usual: sabemos que las únicas soluciones no triviales de (1) se tienen para $\lambda > 0$, y deben ser de la forma
$$y(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(x\sqrt{\lambda})$$
para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$. Las condiciones de contorno dan
$$A\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}) = 0,$$
$$A\cos(\pi\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$
Para que este sistema lineal tenga solución no trivial, su determinante debe ser no nulo, lo cual da
$$\mathrm{sen}(\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}) = 0,$$
es decir,
$$\lambda = 4n^2.$$
El primer valor propio es por tanto $\lambda = 4$, que es el mínimo valor del funcional.

Ejercicio 3. Demuestra que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

no tiene derivada débil con respecto a x, pero sí con respecto a y.

Solución Para ver que tiene derivada débil con respecto a y, tomamos cualquier función $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ y escribimos

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\partial_y\phi(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_y f(x,y)\phi(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0,$$

donde la integración por partes está justificada porque para cada x fijo, $y \mapsto f(x,y)$ es $\mathcal{C}^1$. Por otra parte, supongamos que g es una derivada débil de f con respecto a x. Entonces, para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\partial_x\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \partial_x\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}} \phi(0,y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tomando funciones ϕ con soporte en $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ vemos, por el lema fundamental del cálculo de variaciones, que $g = 0$ en U. Como la línea $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es de medida nula,

$$-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, lo cual es una contradicción para cualquier función ϕ que no valga 0 en algún punto de la forma $(0,y)$.

Ejercicio 4. Sea $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f \in L^2(\Omega)$. Demuestra que el funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega \partial_x u\,\partial_y u + \int_\Omega uf,$$

definido en $H_0^1(\Omega)$, tiene un único mínimo global.

Solución. Para usar el Teorema de Lax-Milgram elegimos

$$a(u,v) := 2\int_\Omega \nabla u \nabla v - \frac{1}{4}\int_\Omega \partial_x u\,\partial_y v - \frac{1}{4}\int_\Omega \partial_x v\,\partial_y u, \qquad \ell(v) := -\int_\Omega vf.$$

El funcional ℓ es el mismo que el visto en clase (luego cumple las condiciones del Teorema: es lineal y continuo en $H_0^1(\Omega)$). El funcional a es parecido y es fácil ver (de la misma forma que en clase) que es bilineal y continuo. Falta ver que es coercivo. Para esto usamos la desigualdad $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$:

$$a(u,u) = 2\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_x u\,\partial_y u \geq 2\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega ((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2) = \frac{7}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Con esto podemos demostrar fácilmente (usando la desigualdad de Poincaré) que a es coercivo. Por el Teorema de Lax-Milgram, $\mathcal{F}$ tiene un único mínimo global.