Universidad de Granada | **Prueba 1** | MODELOS MATEMÁTICOS II
Departamento de Matemática Aplicada | 12 de mayo de 2017 | Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias

Apellidos				Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	3ºA	3ºB	4º

EJERCICIO 1. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional $\mathcal{F}[y] = \displaystyle\int_0^1 (y'(x))^2\,dx$ en el espacio

$$\mathcal{D} = \left\{ C_0^1(0,1) : \int_0^1 y(x)\,dx = 2\,, \quad \int_0^1 xy(x)\,dx = \frac{1}{2} \right\}.$$

1. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D} \cap C^2([0,1])$. ¿Es única la solución del problema de minimización?
2. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\widetilde{\mathcal{D}} \cap C^2([0,1])$, donde

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \left\{ C_0^1(0,1) : \int_0^1 (y(x))^2\,dx = 1\,, \quad \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) y(x)\,dx = 0 \right\}.$$

EJERCICIO 2. Se considera el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(0,x) = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \geq 0 \end{cases}.$$

¿Tiene solución? ¿Es única? Justifícalo. En caso afirmativo, encuéntrala y determina su regularidad.

EJERCICIO 3. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^b \left[(y'(x))^2 + 16e^x y(x) - 4(y(x))^2 \right] dx + 3(y(b))^2, \quad b < \infty\,,$$

en $\mathcal{D} = H_0^1(0,b)$.

1. Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,b)$:

$$\|u\|_{L^2(0,b)} \leq b\|u'\|_{L^2(0,b)}\,.$$

2. Demuestra que, en $H_0^1(0,b)$, $|||u||| := \|u'\|_{L^2(0,b)}$ es una norma equivalente a la inducida de $H^1(0,b)$, es decir, a $\|u\| := \left(\|u\|^2_{L^2(0,b)} + \|u'\|^2_{L^2(0,b)} \right)^{1/2}$.
3. Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones suficientes para garantizar la existencia de un único elemento $y \in \mathcal{D}$ en donde $\mathcal{F}$ alcanza el mínimo.
4. Calcula las extremales[2] de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D} \cap C^2([0,\pi])$. ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

---

[1] Recuerda que $C_0^1(0,b)$ es denso en $H_0^1(0,b)$.
[2] Busca soluciones particulares del tipo $y_p(x) = Ae^x + B$.