Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**2ª Prueba de clase** 2 de junio de 2017

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1. Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones, y justifica brevemente tus respuestas:

1. Las soluciones de la ecuación logística $u'(t) = u(t)(1 - u(t))$ con condición inicial $u(0) > 0$ son siempre crecientes.

2. La transformada de Fourier de una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto es también de soporte compacto.

3. Si $u'(t) = \lambda u(t)$ representa la evolución en tiempo de una población, las unidades de λ deben ser $[T]^{-1}$.

Ejercicio 2. Si F es la transformada de Fourier $F[f](y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} \, \mathrm{d}y$, demuestra que para f, g en la clase de Schwartz se tiene

1. $F[f'](y) = 2\pi i y F[f](y)$.

2. $F[f * g] = F[f] F[g]$.

(Donde $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(z) g(x - z) \, \mathrm{d}z$ es la convolución de f y g.)

Ejercicio 3. Consideramos una reacción química con compuestos A, B, C donde las reacciones posibles son

$$A + A \underset{q_1}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B, \qquad A + B \underset{q_2}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} C,$$

donde las constantes de reacción k_1, k_2, q_1, q_2 son positivas.

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones que gobiernan la evolución en tiempo de las densidades a, b, c de cada uno de los compuestos A, B, C.

2. Demuestra que la cantidad $a + 2b + 3c$ se conserva para todo tiempo.

3. Encuentra todos los equilibrios (no negativos) del sistema.

4. Supongamos que todas las constantes son igual a 1 (es decir, $k_1 = k_2 = q_1 = q_2 = 1$). Si la condición inicial es $a(0) = 6$, $b(0) = c(0) = 0$, y suponiendo que el sistema se aproxima a un equilibrio, ¿cuál debe ser el valor de a una vez que el sistema ha alcanzado el equilibrio?

Ejercicio 4. Consideramos la ecuación del calor en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ acotado con frontera $\mathcal{C}^\infty$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u && \text{en } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(t, x) &= 0 && \text{en } [0, +\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

Sea u una solución clásica de la ecuación anterior, con $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

1. Demuestra que la cantidad
$$E(t) := \int_\Omega u(t,x)^2 \,\mathrm{d}x,$$
definida para $t \geq 0$, es decreciente en tiempo.

2. Usando la desigualdad de Poincaré, demuestra que para cierta constante $\lambda > 0$ se tiene que
$$E(t) \leq E(0)e^{-\lambda t} \qquad \text{para } t \geq 0.$$