Convocatoria Septiembre
8–Septiembre–2017

MODELOS MATEMÁTICOS II
GRADO MATEMÁTICAS
Y DOBLE GRADO CON ING. INFORMÁTICA

Apellidos				Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	3ºA	3ºB	4º

---

1. Se considera
$$\mathcal{D} = \left\{ y \ \in C_0^1([a,b]), \ \int_a^b w(x)y(x)^2\,dx = \frac{b-a}{2} \right\} \cap C^2([a,b])$$
y los siguientes tres funcionales:
$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b \left(t(x)y'(x)^2 + r(x)y(x)^2 \right)\,dx\,, \quad \mathcal{G}[y] = \int_a^b w(x)y(x)^2\,dx\,, \quad \Lambda[y] = \frac{\mathcal{F}[y]}{\mathcal{G}[y]}\,,$$
donde $a < b$, y las funciones introducidas cumplen $t \in C^1([a,b])$, $r, w \in C([a,b])$ y $t, w > 0$.

   1.a) Determina la ecuación diferencial que ha de verificar cualquier extremo relativo de Λ en $\mathcal{D}$.

   1.b) Para $t = w = 1$, $r = -1$, $a = 0$ y $b = \pi$, calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ y prueba que Λ alcanza su mínimo en $\mathcal{D}$ exactamente en dos de ellas.

2. Para $k \in \mathbb{R}$ dado, consideramos la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ por
$$f(x,y) := \begin{cases} |x|^k \operatorname{sen}(y) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   2.a) ¿Para qué valores de k es f una función localmente integrable? Escribe la definición de derivada débil de la función f, con respecto a x y con respecto a y.

   2.b) Calcula las derivadas usuales de f con respecto a x y con respecto a y (definidas en todo $\mathbb{R}^2$, menos posiblemente en los puntos (x,y) con $x = 0$).
   -¿Para qué valores de k es localmente integrable la derivada (usual) respecto a x?
   -¿Para qué valores de k es localmente integrable la derivada (usual) respecto a y?
   Justifica tus respuestas.

   2.c) Para esos valores respectivos de k, calcula las derivadas débiles de f con respecto a x e y.

3. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^b \left((y'(x))^2 + 8e^x y(x) - 2y(x)^2\right) dx + 5(y(b))^2$$

en $\mathcal{D} = H_0^1(0,b)$.

3.a) Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,b)$:

$$\|u\|_{L^2(0,b)} \leq b\|u'\|_{L^2(0,b)}\,.$$

3.b) Demuestra que, en $H_0^1(0,b)$, $|||u||| := \|u'\|_{L^2(0,b)}$ es una norma equivalente a la inducida de $H^1(0,b)$, es decir, a $\|u\|_{H^1(0,b)} := \left(\|u\|^2_{L^2(0,b)} + \|u'\|^2_{L^2(0,b)}\right)^{1/2}$.

3.c) Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones sobre b para garantizar la existencia de un único elemento $y \in \mathcal{D}$ en donde $\mathcal{F}$ alcanze el mínimo.

3.d) Calcula las extremales[2] de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D} \cap C^2([0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}])$. ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

4. Vamos a estudiar el modelo de reacción-difusión (Skellam 1951') para la dinámica de una población biológica con tasa constante de crecimiento $\alpha > 0$, con una densidad de población inicial $v(x,0) = v_0(x)$ (en la clase de Schwartz) y realizando un movimiento difusivo con constante de difusión $D > 0$, es decir:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = D\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \alpha\, v(x,t). \tag{1}$$

4.a) Verifica que las unidades de α^{-1} y $\sqrt{D/\alpha}$ son tiempo y espacio respectivamente, úsalos para realizar la siguiente adimensionalización en espacio y tiempo,

$$s := \alpha\, t,\ \ y := \sqrt{\frac{\alpha}{D}}\, x, \quad u(y,s) := v(x,t)$$

y prueba que existe un cierto valor $a > 0$ tal que u cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(y,s) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,s) + a\, u(y,s), \tag{2}$$

4.b) Verifica que, para todo $s > 0$, la función $U(y,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left\{as - \frac{y^2}{4s}\right\}$ cumple la ecuación (2) e indica todo lo que sepas sobre el límite cuando s tiende a cero de $U(y,s)$. Deduce una expresión para la solución de (2) con condición inicial $u(y,0) = u_0(y) = v_0(\sqrt{\frac{D}{\alpha}}\, y)$, siendo $v_0(x) = 3$.

4.c) Calcula, si existen, las soluciones de tipo $u(y,s) = \phi(y - 2c\, s)$ de la ecuación (2) y deshaz el cambio de variables para calcular las soluciones de tipo ondas viajera v de (1) e indica su velocidad.

[1] Recuerda que $C_0^1(0,b)$ es denso en $H_0^1(0,b)$

[2] Puedes buscar soluciones particulares de la EDO obtenida del tipo $y_p(x) = Ae^x + B$

Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Convocatoria Septiembre
8–Septiembre–2017

MODELOS MATEMÁTICOS II
GRADO MATEMÁTICAS
Y DOBLE GRADO CON ING. INFORMÁTICA

1. Se considera

$$\mathcal{D} = \left\{ y \ \in C_0^1([a,b]),\ \int_a^b w(x) y(x)^2\,dx = \frac{b-a}{2} \right\} \cap C^2([a,b])$$

y los siguientes tres funcionales:

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b \big(t(x) y'(x)^2 + r(x) y(x)^2 \big)\ dx\,, \quad \mathcal{G}[y] = \int_a^b w(x) y(x)^2\,dx\,, \quad \Lambda[y] = \frac{\mathcal{F}[y]}{\mathcal{G}[y]}\,,$$

donde $a<b$, y las funciones introducidas cumplen $t \in C^1([a,b])$, $r, w \in C([a,b])$ y $t, w > 0$.

1.a) Determina la ecuación diferencial que ha de verificar cualquier extremo relativo de Λ en $\mathcal{D}$.

1.b) Para $t = w = 1$, $r = -1$, $a = 0$ y $b = \pi$, calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ y prueba que Λ alcanza su mínimo en $\mathcal{D}$ exactamente en dos de ellas.

$\boxed{1.a)}$ Es evidente que $\Lambda\Big|_{\mathcal{D}} = \frac{2}{b-a}\mathcal{F}\Big|_{\mathcal{D}}$, por lo que los extremos de λ en $\mathcal{D}$, lo serán de $\frac{2}{b-a}\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ y, como el multiplicar por una constante no afecta, de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$. Calculamos pues la ecuación de Euler-Lagrange (problema con restricciones de tipo integral) asociada a $F^*(x,y,p) := t(x)p^2 + r(x)y^2 - \lambda w(x) y^2$, que no es otra que

$$\frac{d}{dt}\Big(F_p^*\Big) - F_y^* = \Big(t(x)y'(x)\Big)' + \Big(\lambda w(x) - r(x)\Big) y(x) = 0.$$

$\boxed{1.b)}$ (Nótese que estamos ante la formulación variacional de un problema de Sturm-Liouville). Para tales elecciones se tiene que

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^\pi \Big(y'(x)^2 - y(x)^2 \Big)\,dx \qquad y \qquad \mathcal{D} = \left\{ y \ \in C_0^1([0,\pi]),\ \int_0^\pi y(x)^2\,dx = \frac{\pi}{2} \right\} \cap C^2([0,\pi])\,.$$

Las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ son las soluciones de la ecuación del apartado anterior (esto es $y'' + (\lambda+1)y = 0$ en este caso) cumpliendo las condiciones de contorno $y(0) = 0 = y(\pi)$ y la restricción integral, esto es:

$$y(x) = A\cos(\sqrt{1+\lambda}\,x) + B\sin(\sqrt{1+\lambda}\,x),$$

verificando $y(0) = y(\pi) = 0$, e $\displaystyle\int_0^\pi y(x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}$.

- De $y(0) = 0$ deducimos que $A = 0$.
- Imponiendo $y(\pi) = 0$ obtenemos los valores $\lambda_n = n^2 - 1$ y las funciones $y_n(x) = B_n \sin(nx)$.
- Por último, $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi y_n(x)^2\,dx = B_n^2 \int_0^\pi \sin(nx)^2\,dx = B_n^2 \frac{\pi}{2}$ nos da el valor de $B_n = \pm 1$.

Por consiguiente, las extremales pedidas son $y_n(x) = \pm\sin(nx)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, bien usando el apartado 1.a), bien usando que $\mathcal{F}[y] \geq \mathcal{F}[\sin(x)] = 0$ y $\mathcal{G}[y] \geq 0$ en $\mathcal{D}$, deducimos que el funcional Λ alcanza su valor mínimo (que es 0, al igual que $\mathcal{F}$) en dos funciones $y_{\pm 1}(x) = \pm\sin(x)$ y en ninguna otra extremal de $\mathcal{F}$, ya que $\Lambda[\pm\sin(nx)] = \frac{\pi}{2}(n^2-1)$.

2. Para $k \in \mathbb{R}$ dado, consideramos la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) := \begin{cases} |x|^k \operatorname{sen}(y) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.a) ¿Para qué valores de k es f una función localmente integrable? Escribe la definición de derivada débil de la función f, con respecto a x y con respecto a y.

2.b) Calcula las derivadas usuales de f con respecto a x y con respecto a y (definidas en todo $\mathbb{R}^2$, menos posiblemente en los puntos (x, y) con $x = 0$).
-¿Para qué valores de k es localmente integrable la derivada (usual) respecto a x?
-¿Para qué valores de k es localmente integrable la derivada (usual) respecto a y?
Justifica tus respuestas.

2.c) Para esos valores respectivos de k, calcula las derivadas débiles de f con respecto a x e y.

2.a) La función f es localmente integrable para $k > -1$, como puede comprobarse integrando $|f|$ en $[-R, R] \times [-R, R]$ (para $R > 0$) y haciendo primero la integral en x. Decimos que f tiene derivada débil con respecto a x si existe una función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ localmente integrable tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\partial_x\phi(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\phi(x,y)\,dx\,dy$$

para toda función $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. La definición análoga se aplica para la derivada con respecto a y.

2.b) Las derivadas usuales, definidas para $x \neq 0$, son

$$\partial_x f(x,y) = k|x|^{k-1}\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sen}(y),$$
$$\partial_y f(x,y) = |x|^k \cos(y),$$

donde sgn denota la función signo. Integrando de nuevo en un cuadrado, vemos que $\partial_x f$ es localmente integrable si y sólo si $k > 0$, y $\partial_y f$ es localmente integrable si y sólo si $k > -1$.

2.c) Para la derivada con respecto a y, se comprueba directamente a partir de la definición que la derivada débil siempre existe y es igual a $|x|^k \cos(y)$, ya que para x fijo la función $y \mapsto f(x, y)$ es diferenciable y siempre podemos integrar por partes en y.

Para la derivada con respecto a x observamos que la función $|x|^k$ es absolutamente continua siempre que $k > 0$. Luego para cualquier función test ϕ con soporte en $(-R, R)^2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\partial_x\phi(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-R}^{R}\operatorname{sen}(y)\int_{-R}^{R}|x|^k\partial_x\phi(x,y)\,dx\,dy \\ &= -\int_{-R}^{R}\operatorname{sen}(y)\int_{-R}^{R}k|x|^{k-1}\operatorname{sgn}(x)\phi(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de integración por partes para la integral de Lebesgue en $[-R, R]$.

3. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^b \left((y'(x))^2 + 8e^x y(x) - 2y(x)^2\right) dx + 5(y(b))^2$$

en $\mathcal{D} = H_0^1(0,b)$.

3.a) Demuestra[a] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,b)$:

$$\|u\|_{L^2(0,b)} \le b\|u'\|_{L^2(0,b)}\,.$$

3.b) Demuestra que, en $H_0^1(0,b)$, $|||u||| := \|u'\|_{L^2(0,b)}$ es una norma equivalente a la inducida de $H^1(0,b)$, es decir, a $\|u\|_{H^1(0,b)} := \left(\|u\|^2_{L^2(0,b)} + \|u'\|^2_{L^2(0,b)}\right)^{1/2}$.

3.c) Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones sobre b para garantizar la existencia de un único elemento $y \in \mathcal{D}$ en donde $\mathcal{F}$ alcanze el mínimo.

3.d) Calcula las extremales[b] de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D} \cap C^2([0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}])$. ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

[a]Recuerda que $C_0^1(0,b)$ es denso en $H_0^1(0,b)$

[b]Puedes buscar soluciones particulares de la EDO obtenida del tipo $y_p(x) = Ae^x + B$

$\boxed{\text{3.a)}}$ Primero lo probamos para $u \in C_0^1(0,b)$; se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(0,b)} &= \int_0^b |u(x)|^2\,dx \overset{Barrow}{=} \int_0^b \left|\int_0^x u'(z)\,dz\right|^2 dx \le \int_0^b \left(\int_0^x |u'(z)|\,dz\right)^2 dx \\
&\overset{Cauchy-Schwartz}{\le} \int_0^b \left(\sqrt{x}\,\|u'\|_{L^2(0,x)}\right)^2 dx = \|u'\|^2_{L^2(0,x)} \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}\|u'\|^2_{L^2(0,b)} \le b^2\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\,,
\end{aligned}$$

donde ha sido empleada la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera:

$$\int_0^x |u'(z)|\,dz = \int_0^x 1\cdot|u'(z)|\,dz \le \left(\int_0^x 1^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x |u'(z)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\,\|u'\|^2_{L^2(0,x)}\,.$$

Para probar la desigualdad sobre funciones $u \in H_0^1(0,b)$, usamos la densidad, esto es, dada $u \in H_0^1(0,b)$, tomamos $u_n \in C_0^1(0,b)$ tal que $\|u_n - u\|^2_{H^1(0,b)} \to 0$. Si concretamos esta convergencia, obtenemos

$$\int_0^b (u_n' - u')^2 dx + \int_0^b (u_n - u)^2 dx \to 0,$$

y, en particular,

$$\int_0^b (u_n')^2 dx \to \int_0^b (u')^2 dx, \quad \int_0^b u^2 dx \to \int_0^b u^2 dx.$$

Como ya hemos probado la desigualdad para u_n, basta tomar los dos límites anteriores en dicha desigualdad para concluir.

$\boxed{\text{3.b)}}$ Claramente $\|u\| \ge \left(\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\right)^{1/2} = |||u|||$. Por otra parte,

$$\|u\| \le \left((1+b^2)\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\right)^{1/2} = \sqrt{1+b^2}\,|||u|||\,,$$

en virtud de la desigualdad del apartado 3.a).

$\boxed{\text{3.c)}}$ Con la idea de aplicar Lax-Milgram, definimos

$$a(u,v) := 2\int_0^b \Big(u'(x)v'(x) - 2u(x)v(x)\Big)\,dx \qquad y \qquad F(u) := -8\int_0^b e^x u(x)\,dx.$$

El funcional $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal y simétrico. Su continuidad en $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ se desprende inmediatamente de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq 2\int_0^b \big(|u'(x)||v'(x)| + 2|u(x)||v(x)|\big)\,dx \leq 2\big(\|u'\|_{L^2(0,b)}\|v'\|_{L^2(0,b)} + 2\|u\|_{L^2(0,b)}\|v\|_{L^2(0,b)}\big) \\ &\leq 2\big(|||u|||\,|||v||| + 2(1+b^2)|||u|||\,|||v|||\big) = 2(3+b^2)|||u|||\,|||v|||\,. \end{aligned}$$

La coercividad se sigue de la siguiente estimación, para la que empleamos nuevamente la desigualdad del primer apartado:

$$a(u,u) = 2\int_0^b \big(u'(x)^2 - 2u(x)^2\big)\,dx \geq 2\int_0^b \big(u'(x)^2 - 2b^2u'(x)^2\big)\,dx = 2(1-2b^2)|||u|||^2\,,$$

de donde se deduce que solamente cuando se cumpla la condición $1-2b^2>0 \Leftrightarrow b<\frac{1}{\sqrt{2}}$, podremos garantizar la coercividad del funcional $a(\cdot,\cdot)$. Finalmente, F es lineal y continuo en $\mathcal{D}$, pues

$$|F(u)| \leq 8\Big(\frac{1}{2}(e^{2b}-1)\Big)^{1/2}\|u\|_{L^2(0,b)} \leq 8e^b\,\|u\|_{L^2(0,b)}\,.$$

Por consiguiente, siempre que $b<\frac{1}{\sqrt{2}}$ podrá aplicarse el teorema de Lax-Milgram y tendremos asegurada la existencia y unicidad de mínimo en $\mathcal{D}$ del siguiente funcional: $\frac{1}{2}a(v,v)-F(v)$, que coincide con $\mathcal{F}-5(y(b))^3$. En consecuencia, también existirá un único mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.

$\boxed{\text{3.d)}}$ La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es $8e^x-4y-2y''=0$, o equivalentemente $y''+2y=4e^x$. La solución general de la ecuación homogénea es $y_h(x)=A\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)+B\cos(\sqrt{2}x)$. Por otra parte, si buscamos una solución particular como la sugerida se llega a que $y_p(x)=\frac{4}{3}e^x$ resuelve la ecuación diferencial. De este modo, todas las soluciones de la ecuación no homogénea son de la forma

$$y(x) = A\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x) + B\cos(\sqrt{2}x) + \frac{4}{3}e^x\,.$$

Imponiendo finalmente las condiciones de contorno $y(0)=y(\frac{\pi}{\sqrt{2}})=0$ llegamos a que B ha de valer simultáneamente $-\frac{4}{3}$ y $\frac{4}{3}e^{\pi/\sqrt{2}}$, de donde se resuelve que $\mathcal{F}$ no tiene extremales en $H_0^1(0,\pi)$. Este resultado no contradice el del apartado anterior, que garantizaba únicamente la existencia de mínimo (y, por lo tanto, de extremal) cuando $b<\frac{1}{\sqrt{2}}$ (mientras que en nuestro caso tenemos $b=\pi/\sqrt{2}$).

4. Vamos a estudiar el modelo de reacción-difusión (Skellam 1951') para la dinámica de una población biológica con tasa constante de crecimiento $\alpha > 0$, con una densidad de población inicial $v(x,0) = v_0(x)$ (en la clase de Schwartz) y realizando un movimiento difusivo con constante de difusión $D > 0$, es decir:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = D\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \alpha\, v(x,t). \tag{3}$$

4.a) Verifica que las unidades de α^{-1} y $\sqrt{D/\alpha}$ son tiempo y espacio respectivamente, úsalos para realizar la siguiente adimensionalización en espacio y tiempo,

$$s := \alpha\, t,\ \ y := \sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,x, \quad u(y,s) := v(x,t)$$

y prueba que existe un cierto valor $a > 0$ tal que u cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(y,s) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,s) + a\, u(y,s), \tag{4}$$

4.b) Verifica que, para todo $s > 0$, la función $U(y,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left\{as - \frac{y^2}{4s}\right\}$ cumple la ecuación (4) e indica todo lo que sepas sobre el límite cuando s tiende a cero de $U(y,s)$. Deduce una expresión para la solución de (4) con condición inicial $u(y,0) = u_0(y) = v_0(\sqrt{\frac{D}{\alpha}}\,y)$, siendo $v_0(x) = 3$.

4.c) Calcula, si existen, las soluciones de tipo $u(y,s) = \phi(y - 2c\,s)$ de la ecuación (4) y deshaz el cambio de variables para calcular las soluciones de tipo ondas viajera v de (3) e indica su velocidad.

4.a) Para obtener las dimensiones físicas, tomamos unidades en (3), obteniendo:

$$\left[\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]\right] = \left[\left[D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\right] = [[\alpha v]] \quad\Rightarrow\quad \frac{[[v]]}{\textit{tiempo}} = \frac{[[D]]\,[[v]]}{\textit{espacio}^2} = [[\alpha]][[v]].$$

Para las unidades de α, comparamos el primer y el tercer elemento; y para las de D comparamos el primero con el segundo. Obtenemos:

$$[[\alpha]] = \frac{1}{\textit{tiempo}}, \qquad [[D]] = \frac{\textit{espacio}^2}{\textit{tiempo}}, \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{D}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\textit{espacio}^2}{\textit{tiempo}}\frac{\textit{tiempo}}{1}} = \textit{espacio},$$

como queríamos. Hacemos el cambio sugerido y recalculamos los 3 términos de (3):

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \alpha\frac{\partial u}{\partial s}(y,s), \qquad D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = D\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\Big)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,s) = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,s), \qquad \alpha v(x,t) = \alpha u(y,s).$$

Dividiendo por α en los 3 términos, obtenemos tirectamente (4) para $a = 1$. El cambio en la condición inicial es simplemente una evaluación en $s = 0$ o equivalentemente $t = 0$.

4.b) Para ver que U cumple (4), simplemente hemos de calcular derivadas (y reescribir U):

$$\frac{\partial U}{\partial s}(y,s) = \frac{4s^2 - 2s + y^2}{4s^2}U(y,s), \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y,s) = \frac{-2s + y^2}{4s^2}U(y,s), \qquad U(y,s) = \frac{4s^2}{4s^2}U(y,s).$$

Evidentemente, U tiene problemas de continuidad en $s = 0$, ya que s aparece como factor en ambos denominadores. Punto a punto, podemos calcular: para $y \neq 0$ tenemos

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{4\pi}U = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{4s}\Big\} \overset{w=\frac{1}{s}}{=} \lim_{w\to\infty}\frac{w}{e^{\frac{y^2}{4}w}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{l'Hopiltal}{=\mapsto} \frac{4}{y^2}\lim_{w\to\infty} e^{(-\frac{y^2}{4}w)} = 0,$$

mientras que $U(0,s) = 1/\sqrt{(4\pi s)}$ tiene límite infinito. Además sabemos que es positiva y que $\int_{\mathbb{R}} U(y,s)dy = e^s$, por lo que sospechamos que le pasa igual que a la solución fundamental del calor. De hecho, si observamos que $U = e^s \times$(solución fundamental del calor), y $e^0 = 1$, entonces su "límite" en cero es el mismo que la solución fundamental del calor, es decir, la Delta de Dirac (recordamos que este límite ha de ser entendido operacionalmente, o en forma de convolución).

Todo esto indica precisamente que U es la solución fundamental de la ecuación que aparece en (4), por lo que la solución del PVI viene dada por la convolución siguiente:

$$u(y,s) = U *_y u_0 = \frac{e^s}{\sqrt{4\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big\{ - \frac{(y-z)^2}{4s} \Big\} \overbrace{u_0(z)}^{=3} \, dz = 3e^s,$$

donde hemos usado la conocida fórmula de la distribución Normal: $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = 1.$

$\boxed{\text{4.c)}}$ Buscamos soluciones de la forma $u(y,s) = \phi(y - 2c\,s)$, donde $2c \in \mathbb{R}$ será la velocidad de la onda (sin unidades físicas). Llamamos $\xi = y - 2cs$ y, sustituyendo en (4), obtenemos

$$\phi(\xi)'' + 2c\,\phi(\xi)' - \phi(\xi) = 0\,,$$

que tiene solución para cualquier $c \in \mathbb{R}$, Concretamente sus soluciones son

$$\phi(\xi) = A\phi_1(\xi) + B\phi_2(\xi), \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

donde

$$\begin{cases} si\ |c| > 1 & \Rightarrow\ \phi_1(\xi) = e^{\lambda_1 \xi},\ \phi_2(\xi) = e^{\lambda_2 \xi},\ con\ \lambda_1 = \sqrt{c^2-1} - c,\ \lambda_2 = -\sqrt{c^2-1} - c, \\ si\ c = \pm 1 & \Rightarrow\ \phi_1(\xi) = e^{-c\xi},\ \phi_2(\xi) = \xi e^{-c\xi}, \\ si\ -1 < c < 1 & \Rightarrow\ \phi_1(\xi) = e^{-c\xi}\cos(\sqrt{1-c^2}\,\xi),\ \phi_2(\xi) = e^{-c\xi}\,\mathrm{sen}(\sqrt{1-c^2}\,\xi). \end{cases}$$

En cualquiera de los casos, deshaciendo el cambio, obtenemos

$$v(x,t) = \phi(y - 2cs) = \phi\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,x - 2c\alpha\,t\Big) = \phi\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\Big(x - 2c\sqrt{\alpha D}\,t\Big)\Big),$$

es decir

$$v(x,t) = \tilde{\phi}(x - \tilde{c}\,t), \qquad \text{siendo el perfil} \quad \tilde{\phi}(z) := \phi\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} z\Big), \qquad \text{y su velocidad} \quad \tilde{c} = 2c\sqrt{\alpha D}.$$

Por concretar uno de los casos, si $|c| > 1$, la expresión explícita de cada onda viajera sería

$$v(x,t) = A\exp\Big\{(\sqrt{c^2-1} - c)\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,x - 2c\alpha\,t\Big)\Big\} + B\exp\Big\{(\sqrt{c^2-1} + c)\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,x - 2c\alpha\,t\Big)\Big\},\ A, B \in \mathbb{R}.$$