Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Convocatoria Diciembre
24–Noviembre–2017

MODELOS MATEMÁTICOS II
Grado Matemáticas
y Doble grado con Ing. Informática

Apellidos	Firma

Nombre	D.N.I o pasaporte	3ºA	3ºB	4º

---

1. Dado $L > 0$, notamos $C_0^1(0, L)$ el conjunto de funciones y de clase 1 en $[0, L]$ tales que $y(0) = y(L) = 0$.

   1.a) Consideramos el problema variacional de minimizar el funcional

   $$\mathcal{F}[y] := \int_0^L (y'(x))^2\, dx \quad \text{en el conjunto} \quad \mathcal{D} = \Big\{ y \in C_0^1(0, L) : \int_0^L y^2(x)\, dx = 1 \Big\}.$$

   Encuentra el valor del mínimo $m = m(L)$ y una función $y_m(x)$ donde se alcance. ¿En cuántas funciones se alcanza?

   1.b) En función del mínimo m y de la función $y_m(x)$ que resuelven el apartado anterior, encuentra la constante C más pequeña tal que

   $$\int_0^L u(x)^2\, dx \le C \int_0^L u'(x)^2\, dx, \quad \text{para toda } u \in C_0^1(0, L),$$

   y una función no nula que demuestre que la constante C no puede ser menor.

2. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

   $$\mathcal{F}[y] = \int_0^b \big((y'(x))^2 + 3e^x y(x) - y(x)^2 \big)\, dx + 2(y(b))^2$$

   en $\mathcal{D} = H_0^1(0, b)$.

   2.a) Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0, b)$:

   $$\|u\|_{L^2(0,b)} \le b \|u'\|_{L^2(0,b)}\, .$$

   2.b) Demuestra que, en $H_0^1(0, b)$, $|||u||| := \|u'\|_{L^2(0,b)}$ es una norma equivalente a la inducida de $H^1(0, b)$, es decir, a $\|u\|_{H^1(0,b)} := \big(\|u\|^2_{L^2(0,b)} + \|u'\|^2_{L^2(0,b)} \big)^{1/2}$.

   2.c) Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones sobre b para garantizar la existencia de un único elemento $y \in \mathcal{D}$ en donde $\mathcal{F}$ alcanze el mínimo.

   2.d) Calcula las extremales[2] de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D} \cap C^2([0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}])$ (es decir, en el caso $b = \pi/\sqrt{2}$). ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

---

[1] Recuerda que $C_0^1(0, b)$ es denso en $H_0^1(0, b)$

[2] Puedes buscar soluciones particulares de la EDO obtenida del tipo $y_p(x) = Ae^x + B$

3. Consideramos una reacción química con compuestos A, B, C donde las reacciones posibles son

$$A + A \underset{q_1}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B, \qquad A + B \underset{q_2}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} C,$$

donde las constantes de reacción k_1, k_2, q_1, q_2 son positivas.

3.a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones que gobiernan la evolución en tiempo de las densidades a, b, c de cada uno de los compuestos A, B, C.

3.b) Demuestra que la cantidad $a + 2b + 3c$ se conserva para todo tiempo.

3.c) Encuentra todos los equilibrios (no negativos) del sistema.

3.d) Supongamos que todas las constantes son igual a 1 (es decir, $k_1 = k_2 = q_1 = q_2 = 1$). Si la condición inicial es $a(0) = 6$, $b(0) = c(0) = 0$, y suponiendo que el sistema se aproxima a un equilibrio, ¿cuál debe ser el valor de a una vez que el sistema ha alcanzado el equilibrio?

4. Se considera la siguiente ecuación de difusión: $\alpha\, \partial_t u = \beta\, \partial^2_{xx} u - \gamma(u - \delta)$, para $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, y donde α, β, γ y δ son constantes positivas.

4.a) Sean $y = \frac{x}{\lambda}$, $\tau = \frac{t}{\sigma}$ y $v(y, \tau) = \frac{u(x,t)}{\delta} - 1$, donde $u(x, t)$ resuelve la ecuación anterior. Determina las expresiones que deben adoptar σ y λ, en términos de las constantes originales, para que $v(y, \tau)$ satisfaga la ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,. \tag{1}$$

4.b) Resuelve la ecuación (1) sujeta a la condición inicial $v(y, 0) = 1$. Por si te resultase útil, recuerda que la transformada de Fourier de la función $f(y) = e^{-\varepsilon^2 y^2}$ es $\hat{f}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{|\varepsilon|} e^{-\frac{\pi^2 z^2}{\varepsilon^2}}$.

4.c) Caso de existir, encuentra todas las ondas viajeras asociadas a la ecuación (1). ¿Hay alguna limitación con respecto a la velocidad de propagación de las mismas?