Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** **Soluciones** 7 de mayo de 2018

Ejercicio 1. Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones, y justifica brevemente tus respuestas:

1. El siguiente problema de valores en la frontera tiene una solución única en $[0, \pi]$:
$$y''(x) - y(x) = \operatorname{sen} x, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$$

2. El siguiente problema de valores en la frontera tiene una solución única en $[0, \pi]$:
$$y''(x) + y(x) = \operatorname{sen} x, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$$

3. Existe una función en $L^2([-\pi, \pi])$ cuyos coeficientes de Fourier son $a_n = 0$ $(n \geq 0)$, $b_n = 1/n^2$ $(n \geq 1)$.

4. Existe una función en $L^2([-\pi, \pi])$ cuyos coeficientes de Fourier son $a_n = 0$ $(n \geq 0)$, $b_n = 1/n$ $(n \geq 1)$.

Solución.

1. *Verdadera.* Usamos el teorema de la alternativa de Fredholm. La ecuación homogénea correspondiente es $y'' - y = 0$ con $y(0) = y(\pi) = 0$ que tiene como única solución $y \equiv 0$ (esto se puede comprobar directamente, y lo hemos visto varias veces en el contexto de los problemas de Sturm-Liouville). Por tanto la ecuación completa tiene solución única, sea cual sea la función que ponemos a la derecha.

2. *Falsa.* De la misma forma, la ecuación homogénea correspondiente es $y'' + y = 0$ con $y(0) = y(\pi) = 0$, que tiene como soluciones $y(x) = A \operatorname{sen}(x)$, con $A \in \mathbb{R}$ una constante. Para $A \neq 0$, esta solución no es perpendicular a la función $\operatorname{sen}(x)$, luego la alternativa de Fredholm nos dice que el problema completo no tiene solución.

3. *Verdadera.* Dicha función es
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx),$$
donde el límite se entiende en el sentido de $L^2([\pi, \pi])$.

4. *Verdadera*, por el mismo motivo que antes: la función es
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx),$$
donde el límite se entiende en el sentido de $L^2([\pi, \pi])$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{D}$ el dominio

$$\mathcal{D} := \{y \in \mathcal{C}^2[0, \pi] \mid y(0) = y(\pi) = 0, \quad \int_0^\pi (y(x))^2 \, \mathrm{d}x = 5\}.$$

Consideramos el siguiente funcional $\mathcal{F}$, definido en $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^\pi \left((y'(x))^2 + 3(y(x))^2 \right) \, \mathrm{d}x.$$

Demuestra que el funcional $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo global en $\mathcal{D}$, y encuentra todas las funciones $y \in \mathcal{D}$ donde lo alcanza.

Solución. Para este ejercicio podemos aplicar directamente el teorema sobre la interpretación variacional de los problemas de Sturm-Liouville. La ecuación de Sturm-Liouville asociada es

$$y'' - 3y + \frac{\lambda}{5}y = y'' + (\frac{\lambda}{5} - 3)y = 0,$$

con condición de frontera $y(0) = y(\pi) = 0$. Si llamamos $\mu = \lambda/5 - 3$, sabemos que las únicas soluciones no triviales (funciones propias) se dan para $\mu = n^2$, con $n \geq 1$ un entero, y son múltiplos de $y_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$. Estos valores de μ corresponden a

$$\lambda = 5(n^2 + 3),$$

que son los valores propios del problema de Sturm-Liouville. El valor del mínimo es por tanto el valor del menor valor propio, obtenido para $n = 1$: $\lambda = 20$. Este valor se alcanza en

$$y(x) = A \operatorname{sen}(x),$$

con la constante A elegida de tal forma que se cumpla la restricción

$$\int_0^\pi (y(x))^2 \, \mathrm{d}x = 5,$$

es decir,

$$5 = A^2 \int_0^\pi (\operatorname{sen}(x))^2 \, \mathrm{d}x = A^2 \frac{\pi}{2}, \qquad \text{luego} \quad A = \pm\sqrt{\frac{10}{\pi}}.$$

Por tanto el mínimo se alcanza en dos funciones:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{10}{\pi}} \operatorname{sen} x, \qquad x \in [0, \pi].$$

Ejercicio 3. Sea $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $f(-\pi) = f(\pi)$. Llamamos a_n, b_n a los coeficientes de Fourier de f y $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ a los coeficientes de Fourier de f'; es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx),$$
$$f'(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \operatorname{sen}(nx).$$

1. Demuestra que
$$\tilde{a}_n = nb_n, \qquad \tilde{b}_n = -na_n, \qquad n \geq 1.$$

2. Encuentra la fórmula correspondiente para la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$ con $f(0) = f(1)$.

Solución.

1. Usando integración por partes, para $n \geq 1$ tenemos
$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, \mathrm{d}x = nb_n$$
$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(nx) \, \mathrm{d}x = -\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = -na_n$$
Observa que los términos de frontera desaparecen a causa de la periodicidad de f.

2. De la misma forma, para la serie de Fourier en $[0, 1]$,
$$\tilde{a}_n = 2 \int_0^1 f'(x) \cos(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = 4\pi n \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = 2\pi n b_n,$$
$$\tilde{b}_n = 2 \int_0^1 f'(x) \operatorname{sen}(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = -4\pi n \int_0^1 f(x) \cos(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = -2\pi n a_n.$$

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{D}$ el dominio

$$\mathcal{D} := \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \mid y(0) = 0, y(1) = e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}\}.$$

Consideramos el siguiente funcional $\mathcal{F}$, definido en $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^1 e^{2x} \left((y'(x))^2 + (y(x))^2\right) \mathrm{d}x.$$

Demuestra que el funcional $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo global en $\mathcal{D}$, y encuentra todas las funciones $y \in \mathcal{D}$ donde lo alcanza.

Solución. El funcional $\mathcal{F}$ es convexo, como puede comprobarse directamente viendo que la función $F(x, y, z) := e^{2x}(z^2 + y^2)$ es convexa en las variables (y, z). Por tanto, alcanza un mínimo en una función $y \in \mathcal{D}$ si y sólo si y es solución de la ecuación de Euler-Lagrange. Dicha ecuación es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{2x}y'(x)) = e^{2x}y(x),$$

es decir,

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0.$$

Esta es una ecuación ordinaria de coeficientes constantes, cuya solución general es

$$y(x) = Ae^{(-1+\sqrt{2})x} + Be^{(-1-\sqrt{2})x}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno,

$$A + B = 0, \qquad Ae^{(-1+\sqrt{2})} + Be^{(-1-\sqrt{2})} = e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}},$$

lo cual implica $A = e, B = -e$. El único mínimo global se alcanza por tanto en la función

$$y(x) = e^{-x+1}\left(e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}\right) = 2e^{-x+1}\operatorname{senh}(\sqrt{2}x).$$