Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Examen final** 19 de junio de 2018

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1. Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones, y justifica brevemente tus respuestas:

1. Una función $u \in H^2(0,1)$ que sea continua tiene que ser además de clase $\mathcal{C}^1$ en $(0,1)$.
2. Un funcional estrictamente convexo definido en el dominio $D = \{y \in \mathcal{C}^2([0,1]) \mid y(0) = y(1) = 0\}$ puede tener dos puntos críticos distintos.
3. La transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{|x|}$ definida en $\mathbb{R}$ es una función positiva.
4. El problema de contorno $y'' + 2y' + y = \cos t$ con la condición $y'(0) = y'(1) = 0$ no tiene solución en el intervalo $[0,1]$.

Solución.

1. Es cierta. Sea u una función continua en $H^2(0,1)$. Por la caracterización que tenemos que las funciones de H^k en intervalos de $\mathbb{R}$, sabemos que su derivada es continua, y por tanto u es igual a una función $\mathcal{C}^1$ en casi todo punto. Como u es continua, es igual a una función $\mathcal{C}^1$.
2. Es falsa. Si $y, z \in D$ son dos puntos críticos distintos de F entonces se cumple que
$$F(z) = F(z) + \delta_{y-z}F(z) < F(y), \qquad F(y) = F(y) + \delta_{z-y}F(y) < F(z),$$
lo cual es una contradicción.
3. Es cierta. La transformada puede calcularse explícitamente: $\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi) = 2(1+\xi^2)^{-1}$.
4. Es falsa. Para comprobarlo podemos usar el teorema de la alternativa de Fredholm. El problema homogéneo correspondiente es una ecuación de coeficientes constantes cuyas soluciones son de la forma $y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}$. Imponiendo las condiciones de contorno comprobamos que debe ocurrir $A = B = 0$. Como el problema homogéneo tiene sólo la solución trivial, el problema completo tiene solución única.

Ejercicio 2. Consideramos el funcional
$$F(u) := \int_0^\pi \int_0^\pi (\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^\pi \int_0^\pi (\partial_x u)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$
con dominio dado por las funciones $u = u(t,x)$ en el conjunto
$$D := \left\{ u \in \mathcal{C}^2([0,\pi]\times[0,\pi]) \;\middle|\; \begin{aligned} u(0,x) &= \mathrm{sen}(4x) \text{ for } x \in [0,\pi], \\ u(\pi,x) &= \mathrm{sen}(3x) + \mathrm{sen}(4x) \text{ for } x \in [0,\pi], \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0 \text{ for } t \in [0,\pi]. \end{aligned} \right\}$$

1. Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange que debe satisfacer la función u para ser un punto crítico de este funcional.
2. Encuentra explícitamente todos los puntos críticos del funcional F.

Solución.

1. Escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al caso de varias variables, para el integrando $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = (\partial_t u)^2 - \frac{1}{4}(\partial_x u)^2$. Obtenemos

$$\partial_t^2 u = \frac{1}{4}\partial_x^2 u,$$

con las condiciones inicial / final y de frontera dadas en el enunciado.

2. Usando separación de variables de la misma forma que se ha visto en clase tenemos que u debe ser de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)\cos(\frac{nt}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(\frac{nt}{2})$$

para ciertos coeficientes A_n, B_n. Para cumplir la condición en $t=0$ tenemos

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(4x),$$

luego $A_n = 0$ para $n \neq 4$ y $A_4 = 1$. La condición para $t = \pi$ es

$$u(\pi,x) = \operatorname{sen}(4x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}) = \operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(3x),$$

lo cual requiere que $B_n = 0$ para $n \neq 3$, $B_3 = -1$. El único punto crítico es por tanto

$$u(t,x) = \operatorname{sen}(4x)\cos(\frac{4t}{2}) - \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(\frac{3t}{2}).$$

Continúa por detrás

Ejercicio 3. Dada una función $f \in \mathcal{C}[0,1]$ consideramos el funcional

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(x)(u(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x,$$

definido en $H_0^1(0,1)$.

1. Usando el teorema de Lax-Milgram, demuestra que el funcional F tiene un único mínimo en $H^1(0,1)$. (Sugerencia: puedes usar que la constante de Poincaré del intervalo $[0,1]$ es π^2; es decir, $\pi^2 \int_0^1 v^2 \leq \int_0^1 (v')^2$ para toda $v \in H_0^1(0,1)$.)

2. Demuestra que la función u donde F alcanza su mínimo está de hecho en $\mathcal{C}^2(0,1)$ (más exactamente, es igual en casi todo punto a una función en $\mathcal{C}^2(0,1)$), cumple $\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 1} u(x) = 0$, y cumple que $u''(x) = \operatorname{sen}(x)u(x) + f(x)$ para todo $x \in (0,1)$.

3. Usando los dos apartados anteriores, demuestra que existe una única solución del siguiente problema de contorno, donde $k \in \mathbb{R}$ es un número cualquiera:

$$w'' = w\operatorname{sen}(x), \qquad w(0) = 0,\; w(1) = k.$$

Solución.

1. Para aplicar el teorema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert $H_0^1(0,1)$ definimos

$$a(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \operatorname{sen}(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \ell(v) := -\int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x,$$

para cualesquiera $u, v \in H_0^1(0,1)$. Se comprueba fácilmente que a es bilineal y continua, y que ℓ es lineal y continua. Para ver que a es coerciva escribimos

$$\begin{aligned} a(v,v) = \int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \operatorname{sen}(x)(v(x))^2\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (v(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)\int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando de nuevo la desigualdad de Poincaré,

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 = \int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (v(x))^2\,\mathrm{d}x &\leq \left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)\int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1+\frac{1}{\pi^2}}{1-\frac{1}{\pi^2}}a(v,v) = \frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}a(v,v). \end{aligned}$$

Esto prueba que a es coerciva. Aplicando el teorema de Lax-Milgram obtenemos que $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)$ tiene un único mínimo en $H^1(0,1)$.

2. Por el teorema de Lax-Milgram sabemos que la función $u \in H_0^1(0,1)$ donde F alcanza el mínimo cumple

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u(x)v(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

para toda $v \in H_0^1(0,1)$. En particular se cumple para cualquier $v \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$. Podemos usar el teorema de integración por partes para la integral de Lebesgue y deducir que

$$\int_0^1 (-u''(x) + u(x)\operatorname{sen}(x) + f(x))v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{para toda } v \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1).$$

Por el lema fundamental, esto implica que

$$u''(x) = u(x)\operatorname{sen}(x) + f(x) \qquad \text{para casi todo } x \in (0,1).$$

Como el miembro derecho es continuo, esto implica que u es de clase $\mathcal{C}^2$ (para ser más exactos, es igual en casi todo punto a una función de clase $\mathcal{C}^2$; tomamos u igual a esta función de clase $\mathcal{C}^2$), y que la igualdad se cumple en todo punto.

Los límites de u en 0 y en 1 son 0 porque $u \in H_0^1(0,1)$.

3. Supongamos que el problema tiene una solución w. Si definimos $w(x) - kx = u(x)$ se cumple que
$$u'' = w'' = w \operatorname{sen}(x) = u \operatorname{sen} x + kx \operatorname{sen}(x),$$
con $u(0) = u(1) = 0$. Por tanto u es la solución que hemos obtenido en los apartados anteriores, y $w = u + kx$ es única. De la misma forma, si u es la solución del apartado 2, vemos que $w = u + kx$ resuelve el problema de este apartado.

Ejercicio 4. Consideramos la siguiente lista de reacciones químicas para las especies A, B, X, Y, Z, que sirven como modelo realista simple para la reacción de Belousov-Zhabotinsky:
$$A + Y \longrightarrow X + P, \qquad X + Y \longrightarrow 2P,$$
$$A + X \longrightarrow 2X + 2Z, \qquad 2X \longrightarrow A + P, \qquad B + Z \longrightarrow Y.$$
Para simplificar, consideramos que las constantes de todas las reacciones anteriores son igual a 1.

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones ordinarias que satisfacen las concentraciones $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ de las especies X, Y, Z, dependientes del tiempo t. (No necesitas escribir las ecuaciones para A, B, P.)

2. En las ecuaciones anteriores, suponemos que las concentraciones de A y B (llamadas a, b) son constantes en tiempo. Consideramos el cambio de variables
$$u = \lambda x, \qquad v = \lambda y, \qquad w = \lambda z, \qquad \tau = \alpha t,$$
donde λ, α son constantes positivas. Encuentra los valores de λ, α de forma que las ecuaciones de evolución de u, v, w sean
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = v - uv + u(1 - 2u)$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = -v - uv + qw$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = 2u - qw$$
para cierta constante q. Encuentra q en función de los valores de a y b.

3. Demuestra que este sistema no puede tener ningún equilibrio que tenga sentido físico si $v \geq 2$.

Solución.

1. Se obtiene
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = ay - xy + ax - 2x^2$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = -ay - xy + bz$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = 2ax - bz.$$

2. Haciendo el cambio obtenemos
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \frac{a}{\alpha}v - \frac{1}{\lambda\alpha}uv + \frac{a}{\alpha}u - \frac{2}{\lambda\alpha}u,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{a}{\alpha}v - \frac{1}{\lambda\alpha}uv + \frac{b}{\alpha}w,$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2a}{\alpha}u - \frac{b}{\alpha}w.$$
Igualando términos vemos que necesitamos
$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\lambda\alpha} = 1,$$
lo cual da
$$\alpha = a, \qquad \lambda = \frac{1}{a}$$
y significa que $q = b/\alpha = b/a$.

3. Si existe un equilibrio u, v, w debe cumplir

$$0 = v - uv + u(1 - 2u), \qquad 0 = -v - uv + qw, \qquad 0 = 2u - qw.$$

De la última ecuación vemos que $qw = 2u$, y de la segunda vemos que

$$0 = -v - uv + 2u = -v + u(2 - v).$$

Esto implica que $u = v/(2 - v)$, lo cual no tiene sentido cuando $v \geq 2$ (ya que o bien u no está definida, o debería ser negativa, lo cual no tiene sentido para una concentración).