Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Prueba extraordinaria
3–Julio–2018

MODELOS MATEMÁTICOS II
Grado Matemáticas y
Doble G. con Ing. Informática

Apellidos				Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	3ºA	3ºB	4º

---

1. $\boxed{\text{4 puntos}}$ JUSTIFICA RAZONADAMENTE la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

1.a) La única solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

satisface $\hat{u}(t,1) = \sqrt{2}\,e^{-2\pi(1+ict)}$, donde $\hat{u}$ denota la transformada de Fourier de u respecto de la variable x. (Por si te resultase de ayuda: $\widehat{g}(y) = \sqrt{2}\,e^{-2\pi y^2}$ para $g(x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2}$).

1.b) El problema de contorno $x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = \cos(\ln(x))$ con la condición $y(1) = y(e^\pi) = 0$ no tiene solución en el intervalo $[1, e^\pi]$.

1.c) Considera la ecuación: $u_{tt} = c^2u_{xx}$, para $(t,x) \in [0,\infty)\times[0,1]$ con condiciones de contorno $u(t,0) = 0$, $u(t,1) = 0$ y dato inicial $u(0,x) = x(x-1)$. Entonces, el funcional $E(t) = \displaystyle\int_0^1 (\partial_t u)^2 + c^2(\partial_x u)^2 dx$ vale constantemente $c^2/6$ sobre la solución, y esta es única.

1.d) Considerado el problema de minimizar $\mathcal{F}[y] := \displaystyle\int_0^1 F(y(x), y'(x))\,dx$, sobre el conjunto $\mathcal{D} = C^1([0,1])$ (con $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$), entonces toda extremal $y(x)$ que esté en $C^2([0,1])$ verifica:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\big(y(0), y'(0)\big) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}\big(y(1), y'(1)\big) = 0, \quad y \quad F\big(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)\big) - y'(x)\frac{\partial F}{\partial p}\big(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)\big) = \textit{constante}.$$

2. $\boxed{\text{3 puntos}}$ Dada una función $f \in \mathcal{C}[0,1]$ consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[u] := \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{8}\int_0^1 \operatorname{sen}(x)(u(x))^2 dx + \int_0^1 f(x)u(x)dx,$$

definido en $H_0^1(0,1)$.

2.a) Demuestra que la siguiente desigualdad:

$$\int_0^1 \big(v(x)\big)^2\,dx \le C\int_0^1 \big(v'(x)\big)^2\,dx,$$

es cierta para toda $v \in H_0^1(0,1)$, para alguna constante $C \le 1$.

2.b) Prueba que $\|u\| := \left(\int_0^1 \big(v'(x)\big)^2\,dx\right)^{1/2}$ es una norma en $H_0^1(0,1)$.

2.c) Demuestra que el funcional $\mathcal{F}$ tiene un único mínimo en $H_0^1(0,1)$.

2.d) Sabiendo que dicho mínimo es $C^2(0,1)$, demuestra que existe una única solución del siguiente problema de contorno:

$$4w'' = w\operatorname{sen}(x), \qquad w(0) = 0,\ w(1) = k \in \mathbb{R}.$$

3. $\boxed{\text{3 puntos}}$ Consideramos las siguientes cinco reacciones químicas para las especies X, Y, y Z (A, B y P se consideran datos), que sirven como modelo realista simple para la reacción de Belousov-Zhabotinsky:

$$A + Y \xrightarrow{k_1} X + P, \qquad X + Y \xrightarrow{k_2} 2P,$$
$$A + X \xrightarrow{k_3} 2X + 2Z, \qquad 2X \xrightarrow{k_4} A + P, \qquad B + Z \xrightarrow{k_5} Y.$$

3.a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones ordinarias que satisfacen las concentraciones $x = [X], y = [Y], z = [Z]$ de las especies X, Y, Z, dependientes del tiempo t. Las concentraciones de A y B (llamadas a, b) se consideran datos dados.

3.b) En las ecuaciones anteriores, supón que a y b son constantes y considera el cambio de variables

$$\tau = \alpha t, \qquad u(\tau) = \lambda x(t), \qquad v(\tau) = \lambda y(t), \qquad w(\tau) = \lambda z(t).$$

Encuentra la expresión de las constantes λ, α, Q_1, Q_2 y Q_3 de forma que se cumplan

$$\frac{du}{d\tau} = v - uv + u(Q_1 - Q_2 u), \qquad \frac{dv}{d\tau} = -v - uv + Q_3 w, \qquad \frac{dw}{d\tau} = 2Q_1 u - Q_3 w,$$

y comprueba que α es una frecuencia (es decir, tiene unidades de 1/tiempo), y que v y Q_2 no tienen dimensiones físicas.

3.c) Encuentra todos los equilibrios del sistema anterior y prueba que todos verifican $v \leq 2Q_1$.