Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** 30 de abril de 2019

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. El funcional $\mathcal{F}(y) = \int_2^3 (x-1)y(x)^2\,\mathrm{d}x$, definido en $\mathcal{C}^2[2,3]$, es estrictamente convexo.
2. Si dos funciones $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ tienen la misma serie de Fourier, entonces $f = g$ en casi todo punto de $(-\pi,\pi)$.
3. Una función cóncava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que además esté acotada superiormente alcanza siempre su valor máximo en algún punto de $\mathbb{R}$.
4. La ecuación de ondas $\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$, planteada para $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, tiene una solución tal que
$$u(0,x) = 1/(1+x^2), \quad u(1,x) = 1/(2+2x+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(x))^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 y(x)^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

1. (0'25 puntos) Encuentra todos sus puntos críticos (es decir, sus extremales) en el dominio
$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \mid y(0) = 0, y(1) = 1\}.$$
2. (0'75 puntos) Demuestra que $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en el dominio
$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \mid y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y(x)^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = 1\}.$$
Encuentra el valor del mínimo, y todas las funciones donde se alcanza.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Consideramos la función $f\colon (0,\pi/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/\sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Está f acotada en $(0,\pi/2)$? ¿Está f en $L^1(0,\pi/2)$? ¿Está f en $L^2(0,\pi/2)$? ¿Está f en $H^1(0,\pi/2)$?