Universidad de Granada · Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** 28 de mayo de 2019

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (0.8 puntos).

1. (0.3 puntos) Demuestra que
$$\int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x$$
para toda $u \in H_0^1(0,1)$.

2. (0.3 puntos) Demuestra que el funcional $\mathcal{F}\colon H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ definido por
$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (\cos x)(u'(x))^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 u'(x)u(x)\operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 u'(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
alcanza un único mínimo en $H_0^1(0,1)$.

3. (0.2 puntos) Suponiendo que la función donde se alcanza el mínimo del apartado anterior es una función en $\mathcal{C}^2[0,1]$, demuestra que debe ser solución de cierta ecuación diferencial. Escribe cuál es esta ecuación.

Solución 1.

1. Podemos hacerlo por ejemplo de la siguiente forma, vista en clase: para $u \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,
$$\int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x u'(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x \int_0^x (u'(y))^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_0^1 \int_0^1 (u'(y))^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (u'(y))^2 \,\mathrm{d}y.$$
Por densidad, obtenemos el mismo resultado para toda $u \in H_0^1(0,1)$.

2. Intentamos aplicar el teorema de Lax-Milgram. En el espacio de Hilbert $H_0^1(0,1)$, definimos
$$a(u,v) := 2\int_0^1 (\cos x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 u'(x)v(x)\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 u(x)v'(x)\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x,$$
$$\ell(v) := -\int_0^1 v'(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x,$$
de forma que $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)$. Es fácil ver que ℓ es lineal y continua. Para la continuidad, por ejemplo, vemos que
$$|\ell(v)| \leq \int_0^1 |v'(x)|\cos(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |v'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 |v'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|v\|_{H^1(0,1)}.$$
Es obvio que a es simétrica (hemos escogido sus dos últimos términos pensando en eso), y es fácil ver que a es bilineal: $a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u,v) + \mu a(u,w)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in H_0^1(0,1)$. También es continua porque
$$\left|\int_0^1 (\cos x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |u'(x)v'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)},$$

y podemos hacer una cota muy parecida para los otros términos. En cuanto a la coercividad, usando la desigualdad del apartado 1 y que $\cos x \geq 1/2$ para $x \in [0,1]$,

$$
\begin{aligned}
a(u,u) = 2\int_0^1 (\cos x)(u'(x))^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)u(x) \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x \\
\geq \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)||u(x)| \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x \\
\geq \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (u'(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (u(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que $a(u,u) \geq \lambda \|u\|^2_{H^1(0,1)}$ para cierta $\lambda > 0$, ya que sabemos que la última expresión que hemos escrito es una norma equivalente a la norma en $H_0^1(0,1)$. Dado que se cumplen todas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, el funcional $\mathcal{F}$ tiene un único mínimo en $H_0^1(0,1)$.

3. La función $u \in H_0^1(0,1)$ donde se alcanza el mínimo de $\mathcal{F}$ es la única que cumple

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(0,1),$$

es decir,

$$2\int_0^1 (\cos x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 u'(x)v(x) \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 u(x)v'(x) \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 v'(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suponiendo que u es una función $\mathcal{C}^2$ en $[0,1]$, debe ocurrir que $u(0) = u(1) = 0$ (ya que $u \in H_0^1(0,1)$). Podemos integrar por partes y obtener

$$-2\int_0^1 ((\cos x)u'(x))'v(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^1 u(x)v(x)\cos x \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 v(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x,$$

lo que implica por el teorema fundamental del cálculo de variaciones que

$$2((\cos x)u'(x))' + \frac{1}{4}u(x)\cos x = \operatorname{sen}(x), \qquad x \in (0,1).$$

(Alternativamente, podemos simplemente escribir la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional $\mathcal{F}$.)

Ejercicio 2 (0.7 puntos)**.** Sea $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$, integrable en $\mathbb{R}$. Queremos resolver la siguiente ecuación de ondas en dimensión 1, donde la incógnita es la función $u = u(t,x)$, $u \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, usando la transformada de Fourier:

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u = \partial_x^2 u, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \\
u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\
\partial_t u(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}.
\end{cases}
\tag{1}
$$

1. (0.2 puntos) Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable. Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos su traslación $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_k(x) := f(x+k)$, $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que

$$\widehat{f_k}(\xi) = e^{ik\xi}\hat{f}(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

2. (0.1 puntos) Como consecuencia, demuestra que para cualquier $k, x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}(\cos(k\xi)\mathcal{F}(f))(x) = \frac{1}{2}(f(x+k) + f(x-k)).$$

(Se entiende que la parte izquierda de la igualdad anterior representa la transformada de Fourier inversa de la función $\xi \mapsto \cos(k\xi)\mathcal{F}(f)(\xi)$).

3. (0.2 puntos) Si u es la solución de (1), escribe la ecuación que cumple su transformada de Fourier respecto x, esto es:

$$\hat{u}(t,\xi) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Encuentra $\hat{u}$ explícitamente.

4. (0.2 puntos) Calculando la transformada inversa de $\hat{u}$, encuentra la solución u explícitamente.

Solución 2. 1. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\widehat{f_k}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(x-k)\xi}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}e^{ik\xi}\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

2. Usando la fórmula anterior para f_k y f_{-k} vemos que

$$\mathcal{F}(f_k + f_{-k})(\xi) = 2\cos(k\xi)\hat{f}(\xi).$$

Tomando la transformada inversa en las dos partes obtenemos la fórmula que se pide.

3. Tomando la transformada de Fourier en la ecuación de ondas obtenemos que

$$\partial_t^2 \hat{u} = -|\xi|^2\hat{u}.$$

Resolviéndola para ξ fijo,

$$\hat{u}(t,\xi) = A(\xi)\cos(|\xi|t) + B(\xi)\,\mathrm{sen}(|\xi|t),$$

para ciertos coeficientes $A = A(\xi)$, $B = B(\xi)$ que dependen de ξ. Imponiendo las condiciones iniciales vemos que $\hat{u}(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$, $\partial_t\hat{u}(0,\xi) = 0$, luego

$$A(\xi) = \widehat{u_0}(\xi), \qquad B(\xi) = 0.$$

Así que

$$\hat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\cos(|\xi|t) = \widehat{u_0}(\xi)\cos(\xi t). \tag{2}$$

4. Tomando la transformada inversa en (2) y usando la fórmula del apartado 2,

$$u(t,\xi) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)),$$

que es la solución de la ecuación de ondas en este caso.