	Modelos Matemáticos II	**Examen final**
Universidad de Granada	Grado en Matemáticas y Doble grado en Informática y Matemáticas	5 de junio de 2019
Departamento de Matemática Aplicada		

Apellidos: | Firma:

Nombre: | D.N.I. o pasaporte:

Duración: **3 horas.** **Grupo (marca el que corresponda):** $3^o A$ ☐, $3^o B$ ☐, 4^o ☐

Ejercicio 1. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. La transformada de Fourier de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa es siempre una función no negativa.
2. Todas las funciones en $\mathcal{C}^1[0,1]$ están en $H^1(0,1)$.
3. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y lineal a trozos, verifica $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 \phi(x)dx$ para cualquier función test $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces $f \in H^1(\mathbb{R})$.
4. Si una enzima libre E reacciona con un sustrato S tal que forma un complejo enzima-sustrato SE para producir una proteína nueva P, $S + E \underset{k_+}{\overset{k_-}{\rightleftharpoons}} SE \xrightarrow{k_2} P + E$, entonces la cantidad total de enzima (esto es, enzima libre y enzima en forma de complejo) se conserva.

Ejercicio 2. Consideramos la siguiente ecuación del calor, planteada en un dominio abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, con incógnita $u = u(t,x)$ $(t \geq 0,\ x \in \overline{\Omega})$ y condición inicial $u_0 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - 2u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Dada una solución u de (1), consideramos la energía
$$E(t) := \int_\Omega |u(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$
Demuestra que $E(t) \leq E(s)$ para todo $0 \leq s \leq t$.
2. Como consecuencia del apartado 1, demuestra que la solución (clásica) de (1) es única.
3. En el caso $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ y $u_0(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, calcula explícitamente la solución u. (Sugerencia: usa separación de variables.)

Ejercicio 3. Se considera el problema consistente en encontrar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \left[4u'(x)v'(x) - kv'(x)u(x) - kv(x)u'(x) - u(x)v(x)\right] dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(0,1)$ y $f \in L^2(0,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro a determinar.

1. Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,1)$:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)} .$$

Demuestra que la norma usual en H^1 es equivalente a la norma

$$|||u|||_{H^1(0,1)} = \|u'\|_{L^2(0,1)}, \quad \text{si} \quad u \in H_0^1(0,1).$$

2. Determina una condición suficiente sobre el parámetro k que permita afirmar que el problema anterior tiene una única solución.

3. Por la regularidad de este tipo de problemas sabemos que, caso de existir, la solución $u \in H^2(0,1)$. ¿Qué ecuación de Euler-Lagrange satisface la posible solución del problema de minimización asociado? ¿Es alguna de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange un mínimo de dicho problema?

Ejercicio 4. Considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^2 [y(x)y'(x)]^n \, dx \,, \quad n \geq 2,$$

definido en $\mathcal{D}_K = \{y \in C^1[0,2], \ y(0) = 1, \, y(2) = K\} \cap C^2$.

1. Demuestra que cualquier mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_K$ cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(n-1)}(y')^{(n-2)}(y^2)'' = 0 \,.$$

2. Estudia la convexidad del funcional $\mathcal{F}$ y del conjunto $\mathcal{D}_K$ según los valores de $K \in \mathbb{R}$.

3. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ y discute cuándo podemos afirmar que son mínimos. (Sugerencia: puede resultarte útil distinguir la paridad de n).

[1]Recuerda que $C_0^1(0,1)$ es denso en $H_0^1(0,1)$.