Universidad de Granada / Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas y Doble grado en Informática y Matemáticas	**Convocatoria extraordinaria** 27 de junio de 2019

Apellidos: ____________________ Firma: ____________________

Nombre: ____________________ D.N.I. o pasaporte: ____________________

Duración: **3 horas.** **Grupo (marca el que corresponda):** $3^o A$ ☐, $3^o B$ ☐, 4^o ☐

Ejercicio 1. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1.a) Todas las funciones en $H^1(0,1)$ están en $\mathcal{C}^1(0,1)$.

1.b) Si $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función impar y $h\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier es una función real.

1.c) La función $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $p(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} & si \quad x\neq 1,\\ 0 & si \quad x=1,\end{cases}$ no tiene derivada débil.

1.d) Si dos funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivables y 2π-periódicas coinciden sobre el intervalo $[0,\pi]$ y además

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx=\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx, \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

entonces $f=g$.

Ejercicio 2. Dado el dominio $\Omega:=(0,1)\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^2$, y un número $k\in(0,\pi/2)$, consideramos el funcional $\mathcal{F}\colon H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[u]:=\int_\Omega\left[\cos(kx)|\nabla u(x,y)|^2+\frac{\partial_x u(x,y)u(x,y)\,\mathrm{sen}(y)}{2}+\partial_y u(x,y)\cos(x)\cos(y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2.a) Sabiendo que $\int_0^1 y(x)^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 y'(x)^2\,\mathrm{d}x$, para toda función $y\in C_0^1([0,1])$, demuestra que

$$\int_0^1\int_0^1 u(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le C\int_0^1\int_0^1|\nabla u(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

para toda $u\in H_0^1(\Omega)$ y encuentra una constante C que hace la desigualdad cierta.

2.b) Encuentra un valor $0<k_*<\pi/2$ tal que $\mathcal{F}$ alcanza un único mínimo en $H_0^1(\Omega)$ para cualquier $0<k<k_*$, y justifica que es así. Ayuda: recuerda que el coseno decrece en el intervalo $[0,\pi/2]$.

Ejercicio 3. Dado el problema variacional:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}[y]:=\int_\pi^{2\pi}\Big(\frac{y'(x)^2+7\,y(x)^2}{2}\Big)dx \text{ en el conjunto } \mathcal{D}=\Big\{y\in C_0^1(\pi,2\pi):\int_\pi^{2\pi}y^2(x)dx=1\Big\}.$$

Justifica que tiene solución, calcula todas las extremales y determina el mínimo m y la(s) función(es) sobre la(s) que lo alcanza.

Ejercicio 4. Consideramos el sistema de reacciones químicas siguientes:

$$X+2Z\xrightarrow{k_1}Y\xrightarrow{k_2}W+X$$

donde $k_1,k_2>0$, y denotamos $x(t)=[X]$ e $y(t)=[Y]$ a las concentraciones respectivas de las sustancias químicas X e Y, y suponemos que $z=[Z]$ y $w=[W]$ son constantes para todo $t\ge 0$. Entonces, si las concentraciones iniciales de $[X]$ e $[Y]$ son $[X]_0=1$ e $[Y]_0=2$ respectivamente, determina todos los estados de equilibrio del proceso.