Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** 6 de mayo de 2020

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. Si $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f(1) = 1$ y
$$\int_0^1 f(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{para toda } v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(0,1)$$
entonces $f(x) = 1$ para toda $x \in [0,1]$.
2. La serie de Fourier de la función $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (\pi - x)^3(x+\pi)^3$ converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$.
3. La serie de Fourier de la función $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (\pi - x)^3$ converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$.
4. El funcional $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^2[-2,2] \to \mathbb{R}$ dado por $\mathcal{F}(y) := y(0)^2 - y(1)^2$ no es cóncavo ni convexo.

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Consideramos el funcional
$$\mathcal{F}(y) = \int_0^{2\pi} 3(y'(x))^2\,\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} 2y(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

1. (0'75 puntos) Demuestra que $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en el dominio
$$D := \left\{ y \in \mathcal{C}^2[0,2\pi] \mid y(0) = y(2\pi) = 0,\ \int_0^{2\pi} y(x)^2\,\mathrm{d}x = 1 \right\}.$$
Encuentra el valor del mínimo, y todas las funciones donde se alcanza.
2. (0'25 puntos) Demuestra que $\mathcal{F}$ no alcanza ningún máximo en el mismo dominio.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$ con soporte compacto contenido en $[0,1]$. Consideramos la ecuación de ondas
$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u = \partial_x^2 u, && t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},\\ &u(0,x) = f(x), && x \in \mathbb{R},\\ &\partial_t u(0,x) = 0, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
donde la incógnita es $u = u(t,x)$. Encuentra su solución explícita y demuestra que el soporte de $x \mapsto u(t,x)$ está contenido en $[-|t|, |t|+1]$.