Universidad de Granada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** 27 de mayo de 2020

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto). Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. (0,5 puntos) Consideramos $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$, $X := \mathcal{C}_c^2(\Omega)$ y la aplicación $a : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por
$$a(u,v) := \int_0^1 \int_0^1 \partial_x u(x,y) \partial_x v(x,y) \, dx \, dy$$
   a) La aplicación a es un producto escalar en X.
   b) El espacio X con la aplicación a es un espacio de Hilbert.

2. (0,25 puntos) Consideramos $\Phi(t,x)$ con $t > 0, x \in \mathbb{R}$, solución fundamental de la ecuación del calor, y $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx = 0$. Entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x-y) g(y) \, dy \, dx = 0 \quad \text{para todo } t > 0.$$

3. (0,25 puntos) Consideramos $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, no negativa y con $g(0) > 0$. La solución u de la ecuación del calor vista en clase, con condición inicial $u(0,x) = g(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, cumple que $u(t,x) > 0$ para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2 (1 punto). Consideramos un dominio abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con $|\Omega| = 1$ (medida de Lebesgue igual a 1), y el funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dz + \lambda \int_\Omega \int_\Omega (u(z)+1)(u(w)+2) J(z-w) \, dz \, dw,$$

donde $J \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ es una función continua, no negativa, de soporte compacto, y tal que $J(z) = J(-z)$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Encuentra un valor $\lambda_0 > 0$ (en función de J) tal que podamos asegurar que para $|\lambda| < \lambda_0$ el funcional $\mathcal{F}$ alcanza un único mínimo en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Ejercicio 3 (1 punto). El siguiente modelo compuesto por 4 leyes de acción de masas es teórico y fue propuesto por investigadores (Prigogine Y Lefever '68) de Bruselas que le dieron el nombre de **Brusselator** (*Brussels oscillator*) ya que posee soluciones oscilantes en torno a un único estado estacionario.

$$A \xrightarrow{k_1} X, \quad B + X \xrightarrow{k_2} Y + D, \quad X + X + Y \xrightarrow{k_3} X + X + X, \quad X \xrightarrow{k4} E.$$

(a) Considera que las concentraciones de A, B, D y E (que puedes denotar respectivamente como a, b, d y e) son constantes y no nulas y, llamando $x(t)$ e $y(t)$ a las concentraciones respectivas de X e Y, en el instante de tiempo t, determina las ecuaciones que verifican (únicamente $x(t)$ e $y(t)$).

(b) Determina las unidades de k_4 y de $\Omega = \sqrt{k_4/k_3}$ y realiza la siguiente adimensionalización de la ecuación: $\tau := k_4 t$ para el tiempo y $u(\tau) := \frac{x(t)}{\Omega}$ y $v(\tau) := \frac{y(t)}{\Omega}$ para las incógnitas, comprobando que el sistema resultante es:

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma + u^2 v - (\beta + 1)u, \quad \frac{dv}{d\tau} = \beta u - u^2 v$$

Describe los parámetros γ y β en función de $k1, k2, k3, k4, a$ y b y verifica que ambos son adimensionales.

(c) Calcula el estado estacionario (es decir, la solución constante en tiempo) en función de γ y β.

(d) ¿Es cierto que todas las soluciones convergen al estado estacionario cuando $t \to +\infty$? Justifica la respuesta. (*Ayuda: puedes estudiar el Jacobiano del sistema*)