



Universidad de Granada



Modelos Matemáticos II
Grado en Matemáticas

Examen Final
10 de junio de 2020

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (2,5 puntos). Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si una función $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada débil, entonces es igual en casi todo punto a una función continua en $(0, 1)$.
2. Si una función $f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada débil, entonces es igual en casi todo punto a una función continua en $(0, 1) \times (0, 1)$.
3. La forma bilineal $a(u, v) := \int_0^1 \int_0^1 \partial_x u(x, y) \partial_x v(x, y) dx dy$, definida en $H_0^1((0, 1)^2)$, es coerciva.
4. Existe una única función $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, que denotamos $u = u(t, x)$, tal que $\partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y que cumpla además $u(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
5. Consideramos la función $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Entonces, la transformada de Fourier de u es una función continua.

Ejercicio 2 (2 puntos). Consideramos la ecuación del calor planteada en el cuadrado $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x, y) &= \Delta u(t, x, y), & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(t, x, y) &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(0, x, y) &= \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y), & (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

1. (1,5 puntos) Encuentra su solución explícita.
2. (0,5 puntos) Para $t \geq 0$, definimos la energía $E(t)$ como

$$E(t) := \int_{\Omega} u(t, x, y)^2 dx dy.$$

Demuestra que $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$.

Ejercicio 3 (3 puntos). Sea $R > 0$. Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^{2\pi R} e^{-2x} ((y'(x))^2 - y(x)^2) dx$$

definido en el dominio

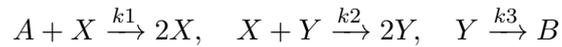
$$\mathcal{D} := \left\{ y \in C^2[0, 2\pi R] \mid y(0) = y(2\pi R) = 0, \int_0^{2\pi R} e^{-2x} y(x)^2 dx = 1 \right\}.$$

- (a) (1,5 puntos) Encuentra todas las funciones donde el funcional \mathcal{F} alcanza su mínimo global en \mathcal{D} .
- (b) (0,75 puntos) ¿Alcanza \mathcal{F} un máximo en \mathcal{D} ? Justifica la respuesta.
- (c) (0,75 puntos) Si consideramos \mathcal{F} como un funcional definido en el dominio

$$\mathcal{D}_2 := \{y \in C^2[0, 2\pi R] \mid y(0) = y(2\pi R) = 0\},$$

¿alcanza \mathcal{F} un mínimo en \mathcal{D}_2 ? Justifica la respuesta.

Ejercicio 4 (2,5 puntos). Considera las siguiente reacciones químicas:



con k_1, k_2, k_3 constantes positivas. Suponemos que las concentraciones a, b de las sustancias A, B son aproximadamente constantes.

- (a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales correspondientes a las concentraciones de X, Y . (Utiliza letras minúsculas para denotar la concentración de cada sustancia química involucrada en la reacción).
- (b) Escribe las ecuaciones de forma adimensional. (*Ayuda: usa $\tau := k_3 t$, $u := \frac{k_1}{k_3} x$, $v := \frac{k_2}{k_3} y$)*)
- (c) Demuestra que existen dos estados estacionarios y escribe sus expresiones.
- (d) Estudia la estabilidad de los estados estacionarios, a través del jacobiano del sistema.