Universidad de Granada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Examen Final** 10 de junio de 2020

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si una función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ tiene derivada débil, entonces es igual en casi todo punto a una función continua en $(0,1)$.
2. Si una función $f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ tiene derivada débil, entonces es igual en casi todo punto a una función continua en $(0,1) \times (0,1)$.
3. La forma bilineal $a(u,v) := \int_0^1 \int_0^1 \partial_x u(x,y) \partial_x v(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, definida en $H_0^1((0,1)^2)$, es coerciva.
4. Existe una única función $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, que denotamos $u = u(t,x)$, tal que $\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y que cumpla además $u(0,x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
5. Consideramos la función $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1), \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1). \end{cases}$$
Entonces, la transformada de Fourier de u es una función continua.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Consideramos la ecuación del calor planteada en el cuadrado $\Omega := (0,1) \times (0,1)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x,y) &= \Delta u(t,x,y), && (x,y) \in \Omega, \ t > 0, \\ u(t,x,y) &= 0 && (x,y) \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \\ u(0,x,y) &= \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y), && (x,y) \in \Omega. \end{aligned}$$

1. (1,5 puntos) Encuentra su solución explícita.
2. (0,5 puntos) Para $t \geq 0$, definimos la energía $E(t)$ como
$$E(t) := \int_\Omega u(t,x,y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$
Demuestra que $\lim_{t \to +\infty} E(t) = 0$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea $R > 0$. Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) := \int_0^{2\pi R} e^{-2x} \left((y'(x))^2 - y(x)^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

definido en el dominio

$$\mathcal{D} := \left\{ y \in \mathcal{C}^2[0, 2\pi R] \mid y(0) = y(2\pi R) = 0, \ \int_0^{2\pi R} e^{-2x} y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

(a) (1,5 puntos) Encuentra todas las funciones donde el funcional $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo global en $\mathcal{D}$.

(b) (0,75 puntos) ¿Alcanza $\mathcal{F}$ un máximo en $\mathcal{D}$? Justifica la respuesta.

(c) (0,75 puntos) Si consideramos $\mathcal{F}$ como un funcional definido en el dominio

$$\mathcal{D}_2 := \left\{ y \in \mathcal{C}^2[0, 2\pi R] \mid y(0) = y(2\pi R) = 0 \right\},$$

¿alcanza $\mathcal{F}$ un mínimo en $\mathcal{D}_2$? Justifica la respuesta.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)**.** Considera las siguiente reacciones químicas:

$$A + X \xrightarrow{k1} 2X, \quad X + Y \xrightarrow{k2} 2Y, \quad Y \xrightarrow{k3} B$$

con k_1, k_2, k_3 constantes positivas. Suponemos que las concentraciones a, b de las sustancias A, B son aproximadamente constantes.

(a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales correspondientes a las concentraciones de X, Y. (Utiliza letras minúsculas para denotar la concentración de cada sustancia química involucrada en la reacción).

(b) Escribe las ecuaciones de forma adimensional. (*Ayuda: usa* $\tau := k_3 t$, $u := \frac{k_1}{k_3} x$, $v := \frac{k_2}{k_3} y$)

(c) Demuestra que existen dos estados estacionarios y escribe sus expresiones.

(d) Estudia la estabilidad de los estados estacionarios, a través del jacobiano del sistema.