Universidad de Granada · Departamento de Matemática Aplicada	Modelos Matemáticos II Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Prueba de clase 26 de abril de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. No hay ningún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación

$$y''(t) + ty'(t) + \lambda \cos(t)y(t) = 0, \qquad y(0) = y(\pi/4) = 0$$

   tiene soluciones no triviales $y\colon [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$.

2. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado y $F\colon C \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa que alcanza su mínimo en un punto de C. Entonces F no puede alcanzar su mínimo en ningún otro punto de C.

3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y $F\colon U \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa que alcanza su mínimo en un punto de U. Entonces F no puede alcanzar su mínimo en ningún otro punto de U.

4. El coeficiente de $\operatorname{sen}(3x)$ en la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función $f(x) := x^2 + \operatorname{sen}(x)$ es 0.

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 e^{-t}((y'(t))^2 + 2y(t)^2)\,\mathrm{d}t$$

definido en el dominio

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \mid y'(1) = e^2 - 1/e\}.$$

Demuestra que $\mathcal{F}$ alcanza un único mínimo en su dominio, y encuentra la función donde lo alcanza.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) := \int_a^b F(y(t), y'(t))\,\mathrm{d}t,$$

definido en el dominio $D := \mathcal{C}^2[a,b]$, donde $a < b \in \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ cuyas variables denotamos por $F = F(y,z)$. Para cualquier función $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su energía asociada $E_y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$E_y(t) := y'(t)\,\partial_z F(y(t), y'(t)) - F(y(t), y'(t)), \qquad t \in [a,b].$$

Demuestra que si y es un punto crítico del funcional $\mathcal{F}$ entonces E_y es una función constante en $[a,b]$.