Universidad de Granada · Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** 4 de mayo de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. La ecuación
$$y''(t) + y(t) = e^t + \cos t, \qquad y(0) = y(1) = 0$$
tiene una única solución $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

2. Sea B la bola de centro 0 y radio 1 en $\mathbb{R}^2$. El funcional $\mathcal{F}(y) := \int_B |\nabla y(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ es estrictamente convexo en el dominio $D := \{y \in \mathcal{C}^2(\overline{B}) \mid y = 0 \text{ en } \partial B\}$.

3. Una función estrictamente convexa $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ no puede alcanzar su máximo.

4. El coeficiente de $\operatorname{sen}(3x)$ en la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función $f(x) := x^2 + \operatorname{sen}(x)$ es 1.

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Dado $L > 0$, consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^L \Big((y'(t))^2 - y(t)^2 \Big) \,\mathrm{d}t.$$

Para cada uno de los dominios siguientes, encuentra todas las funciones donde $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo, y di cuál es su valor mínimo:

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,L] \mid y(0) = y(L) = 0,\ \int_0^L y(t)^2 \,\mathrm{d}t = 1\} \tag{1}$$

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,L] \mid y(0) = y(L) = 0,\ \int_0^L y(t)^2 \,\mathrm{d}t = 10\} \tag{2}$$

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,L] \mid y(0) = y(L) = 0,\ \int_0^L y(t)^2 \,\mathrm{d}t = 1,\ \int_0^L y(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{L}\right) \mathrm{d}t = 0\} \tag{3}$$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) := \int_a^b F(y(t), y'(t)) \,\mathrm{d}t,$$

definido en el dominio $D := \mathcal{C}^2[a,b]$, donde $a < b \in \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ cuyas variables denotamos por $F = F(y,z)$. Para cualquier función $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su energía asociada $E_y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$E_y(t) := y'(t)\, \partial_z F(y(t), y'(t)) - F(y(t), y'(t)), \qquad t \in [a,b].$$

Demuestra que si y es un punto crítico del funcional $\mathcal{F}$ entonces E_y es una función constante en $[a,b]$.