	Modelos Matemáticos II	Prueba de clase y soluciones
Universidad de Granada / Departamento de Matemática Aplicada	Grado en Matemáticas	4 de mayo de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. La ecuación
$$y''(t) + y(t) = e^t + \cos t, \qquad y(0) = y(1) = 0$$
tiene una única solución $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

2. Sea B la bola de centro 0 y radio 1 en $\mathbb{R}^2$. El funcional $\mathcal{F}(y) := \int_B |\nabla y(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ es estrictamente convexo en el dominio $D := \{y \in \mathcal{C}^2(\overline{B}) \mid y = 0 \text{ en } \partial B\}$.

3. Una función estrictamente convexa $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ no puede alcanzar su máximo.

4. El coeficiente de $\operatorname{sen}(3x)$ en la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función $f(x) := x^2 + \operatorname{sen}(x)$ es 1.

Solución 1.

1. Es verdadera por el teorema de la alternativa de Fredholm, ya que la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ con $y(0) = y(1) = 0$ tiene como única solución la trivial.

2. Verdadero. Como la función $z \mapsto |z|^2$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$, para cualquier $\theta \in (0,1)$, $y, w \in D$ tenemos
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta y + (1-\theta)w) &= \int_B \Big|\theta \nabla y(x) + (1-\theta)\nabla w(x)\Big|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\le \theta \int_B \Big|\nabla y(x)\Big|^2 \,\mathrm{d}x + (1-\theta)\int_B \Big|\nabla w(x)\Big|^2 \,\mathrm{d}x = \theta\mathcal{F}(y) + (1-\theta)\mathcal{F}(w).\end{aligned}$$
Esto demuestra que $\mathcal{F}$ es convexo. Para ver que es estrictamente convexo, obervamos que la igualdad en la comparación anterior sólo puede darse si
$$\nabla y(x) = \nabla w(x) \qquad \text{para casi todo } x \in B,$$
ya que $z \mapsto |z|^2$ es estrictamente convexa, y hemos usado este hecho para cada $x \in B$. Como ∇y, ∇w son continuas, vemos que $\nabla y(x) = \nabla w(x)$ para todo $x \in B$, luego $y(x) = w(x) + C$ para cierta $C \in \mathbb{R}$ y todo $x \in B$. Como tanto y como w valen 0 en el borde de B, vemos que $C = 0$, así que la igualdad se da sólo si $y = w$.

3. Es verdad. Supongamos que $\mathcal{F}$ alcanza su máximo en $y \in \mathcal{C}^2(R^2)$. Tomamos cualquier cualquier $v \neq 0$, $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y cualquier $\theta \in (0,1)$, elegimos
$$z := y + v, \qquad w := y - \frac{\theta}{1-\theta}v,$$
de forma que
$$y = \theta z + (1-\theta)w.$$
Observa además que $z \neq w$. Entonces, usando la convexidad estricta de $\mathcal{F}$ y el hecho de que alcanza un máximo en y,
$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(\theta z + (1-\theta)w) < \theta\mathcal{F}(z) + (1-\theta)\mathcal{F}(w) \le \theta\mathcal{F}(y) + (1-\theta)\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(y),$$
lo cual es una contradicción.

4. Falso. El coeficiente es 0, ya que la integral a calcular es

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}(3x) \, \mathrm{d}x,$$

y los dos sumandos dan integral 0 (el primero es una función impar; el segundo es cero porque $\operatorname{sen} x$ es perpendicular a $\operatorname{sen} 3x$ en el producto escalar usual de $L^2(-\pi, \pi)$. Alternativamente, las integrales se pueden calcular.)

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Dado $L > 0$, consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^L \Big((y'(t))^2 - y(t)^2 \Big) \, \mathrm{d}t.$$

Para cada uno de los dominios siguientes, encuentra todas las funciones donde $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo, y di cuál es su valor mínimo:

$$D := \{ y \in \mathcal{C}^2[0, L] \mid y(0) = y(L) = 0, \ \int_0^L y(t)^2 \, \mathrm{d}t = 1 \} \tag{1}$$

$$D := \{ y \in \mathcal{C}^2[0, L] \mid y(0) = y(L) = 0, \ \int_0^L y(t)^2 \, \mathrm{d}t = 10 \} \tag{2}$$

$$D := \{ y \in \mathcal{C}^2[0, L] \mid y(0) = y(L) = 0, \ \int_0^L y(t)^2 \, \mathrm{d}t = 1, \ \int_0^L y(t) \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi t}{L}\Big) \, \mathrm{d}t = 0 \} \tag{3}$$

Solución 2. El problema de Sturm-Liouville asociado al primer dominio es

$$y'' = -(\lambda + 1) y, \qquad y(0) = y(L) = 0.$$

Es un problema que ha aparecido varias veces en clase y sabemos que sus valores propios son $\lambda_n + 1 = n^2 \pi^2 / L^2$ con $n \geq 1$ entero, con funciones propias asociadas

$$\varphi_n(t) = B \operatorname{sen}\Big(\frac{n \pi t}{L}\Big).$$

Sabemos por un resultado visto en clase que el valor del mínimo en el dominio (1) es $\lambda_1 = \pi^2/L^2 - 1$, y que se alcanza en el espacio propio asociado, con un B que cumpla la restricción:

$$1 = B^2 \int_0^L \Big(\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{L}) \Big)^2 \, \mathrm{d}t = B^2 \frac{L}{2},$$

lo cual da las dos posibilidades $B = \pm\sqrt{2/L}$. Así que

Dominio (1): el mínimo vale $\pi^2/L^2 - 1$ y se alcanza en $y(t) = \pm\sqrt{2/L} \operatorname{sen}(\pi t / L)$.

En el dominio (2) el problema de Sturm-Liouville asociado es el mismo, pero escribiendo $\lambda/10$ en lugar de λ. Por tanto los valores propios asociados son $\lambda_n = 10(n^2\pi^2/L^2 - 1)$, con las mismas funciones propias que antes. Al normalizarlas para que cumplan la restricción obtenemos

$$10 = B^2 \int_0^L \Big(\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{L}) \Big)^2 \, \mathrm{d}t = B^2 \frac{L}{2},$$

lo cual da las dos posibilidades $B = \pm\sqrt{20/L}$. Así que

Dominio (2): el mínimo vale $10\pi^2/L^2 - 10$ y se alcanza en $y(t) = \pm\sqrt{20/L} \operatorname{sen}(\pi t / L)$.

Por último, para el dominio (3) sabemos que el mínimo se alcanza en la segunda función propia (normalizada) y vale lo que vale el segundo valor propio. El problema de Sturm-Liouville es exactamente el mismo del dominio (1), así que:

Dominio (3): el mínimo vale $4\pi^2/L^2 - 1$ y se alcanza en $y(t) = \pm\sqrt{2/L} \operatorname{sen}(2\pi t / L)$.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) := \int_a^b F(y(t), y'(t))\,\mathrm{d}t,$$

definido en el dominio $D := \mathcal{C}^2[a,b]$, donde $a < b \in \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ cuyas variables denotamos por $F = F(y,z)$. Para cualquier función $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su energía asociada $E_y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$E_y(t) := y'(t)\,\partial_z F(y(t), y'(t)) - F(y(t), y'(t)), \qquad t \in [a,b].$$

Demuestra que si y es un punto crítico del funcional $\mathcal{F}$ entonces E_y es una función constante en $[a,b]$.

Solución 3. Los puntos críticos de $\mathcal{F}$ deben cumplir la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\partial_z F(t, y(t), y'(t))\big) = \partial_y F(t, y(t), y'(t)).$$

Si y cumple esta ecuación, entonces derivando $E_y(t)$ en t obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_y(t) = y''(t)\,\partial_z F(y(t), y'(t)) + y'(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_z F(y(t), y'(t)) - y'(t)\partial_y F(y(t), y'(t)) - y''(t)\partial_z F(y(t), y'(t)),$$

que es 0 porque el primer término y el último se cancelan, y los otros dos también gracias a la ecuación de Euler-Lagrange.