Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase y soluciones** 25 de mayo de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (0,5 puntos)**.**

1. (0,15 puntos) Encuentra los coeficientes a_n, b_n de la serie de Fourier de la función $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(3x + \frac{\pi}{4})$, de forma que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

2. (0,2 puntos) Consideramos la función $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := |x|^{3/2}$. ¿Para qué enteros $k \geq 0$ es cierto que $f \in H^k(-1, 1)$? Justifica tu respuesta.

3. (0,15 puntos) Sea A una matriz simétrica $d \times d$, estrictamente definida positiva, y sea $v \in \mathbb{R}^d$ un vector cualquiera. Demuestra que el funcional $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definido por

$$F(x) := \langle Ax, x \rangle - \langle x, v \rangle$$

alcanza un único mínimo en $\mathbb{R}^d$, y no alcanza ningún máximo.

Solución 1.

1. Vemos que

$$f(x) = \cos(\pi/4) \cos(3x) - \operatorname{sen}(\pi/4) \operatorname{sen}(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(3x).$$

Esto ya es la expresión de la serie de Fourier, así que inmediatamente tenemos que

$$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$a_n = b_n = 0 \quad \text{para } n \neq 3.$$

2. Por resultados vistos en clase sabemos que

$$f'(x) = \frac{3}{2} |x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) \qquad \text{en sentido débil,}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4} |x|^{-1/2} \qquad \text{en sentido débil,}$$

y sabemos que no hay derivada tercera en sentido débil. Vemos que $f \in L^2(-1, 1)$, $f' \in L^2(-1, 1)$, pero $f'' \notin L^2(-1, 1)$, así que:

$$f \in H^0(-1, 1), \quad f \in H^1(-1, 1), \qquad f \notin H^k(-1, 1) \quad \text{para } k \geq 2.$$

3. Si consideramos el espacio de Hilbert $\mathbb{R}^d$ con el producto escalar usual y definimos

$$a(x, y) := 2\langle Ax, y \rangle, \qquad \ell(x) := \langle x, v \rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

es fácil ver que a, ℓ cumplen todas las propiedades requeridas por el teorema de Lax-Milgram (a bilineal, continua, simétrica y coerciva; ℓ lineal y continua). En este caso a es coerciva porque

$$|a(x,x)| = 2\langle Ax, x\rangle \geq 2\lambda \|x\|^2,$$

donde la desigualdad es equivalente a la propiedad de que A sea definida positiva. El Teorema de Lax-Milgram nos dice entonces que existe un único punto crítico de F, que es además un mínimo. No se puede alcanzar un máximo porque sólo existe un punto crítico, que es un mínimo estricto.

Alternativamente, también se puede demostrar que F es convexo y que tiene un único punto crítico en $x = A^{-1}v$.

Ejercicio 2 (0,5 puntos)**.** Sea $\Omega := (0,1) \times (0,2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideramos la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta u(x,y) = -\lambda u(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro, y con condición de contorno

$$u(x,y) = 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in \partial\Omega.$$

Encuentra todas las posibles soluciones clásicas en variables separadas (es decir, de la forma $u(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$) de la ecuación anterior, para todos los posibles valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución 2. Una posibilidad es $u(x,y) = 0$, la solución trivial. Una solución no trivial $u(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ debe cumplir

$$\psi''(x)\varphi(y) + \psi(x)\varphi''(y) = -\lambda\psi(x)\varphi(y) \qquad \text{en } \Omega,$$

y además

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(2) = 0.$$

Dividiendo por $\psi(x)\varphi(y)$ vemos que (al menos donde $\psi(x)\varphi(y) \neq 0$),

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)} - \lambda \qquad \text{en } \Omega,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= -\mu\psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \\ \varphi''(y) &= -(\lambda - \mu)\varphi(y), \qquad \varphi(0) = \varphi(2) = 0. \end{aligned}$$

Esto son dos problemas de tipo Sturm-Liouville vistos en clase, y sabemos que implican

$$\mu = n^2\pi^2, \qquad \lambda - \mu = \frac{m^2\pi^2}{4} \Longrightarrow \lambda = \frac{\pi^2(m^2 - 4n^2)}{4}$$

y

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}(n\pi x), \qquad \varphi(y) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{y\pi m}{2}\right).$$

Todas las soluciones en variables separadas son por tanto

$$u(x,y) = C\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{y\pi m}{2}\right)$$

para cierta $C \in [0, +\infty)$ y $m, n \geq 1$ enteros.

Queda el detalle de justificar que no hay otras soluciones en variables separadas, ya que estrictamente sólo podemos completar el razonamiento anterior en los puntos x, y donde $\psi(x)\varphi(y) \neq 0$. Pero el razomaniento sí es válido para probar que en los puntos donde φ, ψ no sean 0 deben ser de la forma anterior. Como no hay posibilidad de completar una función $\mathcal{C}^2$ definida a trozos que valga 0 en algunos intervalos y la solución usual en otros, vemos que en realidad no hay otras soluciones en variables separadas. Esta última parte no se ha tenido en cuenta para la corrección.

Ejercicio 3 (0,5 puntos)**.** Sea $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideramos la ecuación en derivadas parciales

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_x \partial_y u = e^x e^y & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

1. Enuncia una definición razonable de solución clásica para esta ecuación.
2. Enuncia una definición razonable de solución débil para esta ecuación.
3. Usando estas definiciones, demuestra que una solución clásica es también una solución débil.
4. Demuestra que existe una única solución débil de la ecuación, en el sentido de la definición que acabas de dar.

Solución 3.

1. Decimos que una función $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una solución clásica del problema si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y cumple la ecuación anterior en cada punto (tanto la EDP, en Ω, como la condición de frontera en $\partial\Omega$).

2. Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema si

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \partial_y u \, \partial_x v = -\int_\Omega e^x e^y v \qquad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega),$$

donde se entiende que todas las integrales son en x, y.

3. Si u es una solución clásica, podemos multiplicar la ecuación por $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrar:

$$\int_\Omega e^x e^y v = \int_\Omega v \Delta u + \int_\Omega v \partial_x \partial_y u = -\int_\Omega \nabla v \nabla u - \int_\Omega \partial_x v \partial_y u,$$

donde hemos usado una de las fórmulas de Green vistas en clase. Esto demuestra que se cumple la igualdad de la forma débil para todos $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, y entonces se cumple también para $v \in H_0^1(\Omega)$ por densidad.

4. Para usar el teorema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ definimos $a\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \partial_y u \partial_x v, \qquad \ell(v) := -\int_\Omega e^x e^y v.$$

Es fácil ver que a es bilineal y continua, y que ℓ es lineal y continua. Para ver que a es coerciva podemos usar la desigualdad de Poincaré:

$$\begin{aligned} a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega \partial_y v \partial_x v \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |\partial_y v||\partial_x v| \\ \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_y v|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x v|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2. \end{aligned}$$

(Hemos usado también la desigualdad $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.) Una vez que tenemos esta desigualdad, la coercividad se demuestra igual que se ha visto en clase para la ecuación de Poisson. El teorema de Lax-Milgram demuestra entonces que existe una única solución débil de la ecuación.