Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	**Prueba de clase** 31 de mayo de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (0,4 puntos)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. La función $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1/2|$ está en $H^1(0,1)$.
2. El funcional $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^1 u(x) \, \mathrm{d}x$ definido en $H_0^1(0,1)$ alcanza un único mínimo.
3. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ la bola abierta centrada en 0 y de radio 1. Existe una única función $u = u(x,y)$, $u \in \mathcal{C}^2(B)$ que cumple $\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0$ en B.
4. Si $f\colon [-\pi,\pi]$ es una función continua e impar entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$.

Solución 1.

1. Verdadera. Por un resultado visto en clase sabemos que la función $|x|^k$, definida en $(-a,a)$ para $a > 0$ dado, está en $H^1(-1,1)$ si y sólo si $k > 1/2$. La función del ejercicio es una traslación de esta función, y exactamente los mismos argumentos nos dan que efectivamente $f \in H^1(0,1)$.
2. Verdadera. Una aplicación directa del teorema de Lax-Milgram con $a(u,v) := 2\int_0^1 u'v'$, $\ell(v) := \int_0^1 u$ nos da el resultado (tanto las propiedades necesarias de a y ℓ las hemos visto en clase, así que no es necesario volver a demostrarlas).
3. Falsa. Hay muchos ejemplos que muestran que no es así, como las funciones constantes $u(x,y) = k$ con $k \in \mathbb{R}$.
4. Falsa. No siempre. Sabemos que la serie de Fourier de la función $f(x) = x$, por ejemplo, no converge uniformemente a x. En general, esto ocurrirá si $f(-\pi) \neq f(\pi)$.

Ejercicio 2 (0,5 puntos)**.** Consideramos la ecuación de ondas $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ con incógnita $u = u(t,x)$, planteada en $t \in \mathbb{R}$, $x \in [0,L]$. Supongamos que tenemos una condición oscilatoria en el extremo derecho, y fija en el izquierdo:

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = \operatorname{sen}(\lambda t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Encuentra todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que esta ecuación tiene soluciones en variables separadas.

Solución 2. Para $\lambda = 0$ existe obviamente la solución $u = 0$, así que supongamos que $\lambda \neq 0$. Si buscamos soluciones de la forma $u(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$ y usamos el método de separación de variables obtenemos que

$$\varphi''(t) = -\mu\varphi(t), \qquad \varphi(t)\psi(L) = \operatorname{sen}(\lambda t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

y que

$$\psi''(x) = -\mu\psi(x), \qquad \psi(0) = 0, \qquad x \in (0,L).$$

De $\varphi'' = -\mu\varphi$ (dependiendo del signo de μ) deducimos que φ es o bien una combinación lineal de exponenciales, o combinación lineal de senos y cosenos, o una función afín. Como sabemos que

$\varphi(t)\psi(L) = \operatorname{sen}(\lambda t)$ vemos que la única opción es que sea una combinación de senos y cosenos, así que $\mu > 0$. En concreto, para que la igualdad $\varphi(t)\psi(L) = \operatorname{sen}(\lambda t)$ sea posible, necesitamos

$$\sqrt{\mu} = |\lambda|.$$

Para que $\varphi(t)\psi(L) = \operatorname{sen}(\lambda t)$ sea posible necesitamos también que $\psi(L) \geq 0$, y entonces tenemos finalmente

$$\varphi(t) = \frac{1}{\psi(L)} \operatorname{sen}(\lambda t).$$

Por otra parte, de la ecuación de ψ deducimos que

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}(x\sqrt{\mu}) = A \operatorname{sen}(x|\lambda|) = B \operatorname{sen}(x\lambda),$$

con $A \in \mathbb{R}$ una constante y $B = A$ o $B = -A$, según el signo de λ. La condición $\psi(L) \neq 0$ es equivalente a

$$\lambda \neq \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, la ecuación original tiene soluciones en variables separadas si $\lambda = 0$, o si $\lambda \neq \frac{n\pi}{L}$ para $n \in \mathbb{Z}$, y en este último caso la solución es

$$u(t,x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\lambda L)} \operatorname{sen}(\lambda t) \operatorname{sen}(\lambda x).$$

Ejercicio 3 (0,6 puntos)**.** En el dominio $D := \{u \in \mathcal{C}^2[-1,1] \mid u(-1) = u(1) = 0\}$ consideramos el funcional $\mathcal{F}\colon D \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{1} (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - u(0).$$

1. Demuestra que $\mathcal{F}$ se puede extender de forma única a un funcional $\widetilde{\mathcal{F}}$ continuo definido en el espacio $H_0^1(-1,1)$.
2. Demuestra que $\widetilde{\mathcal{F}}$ tiene un único mínimo en $H_0^1(-1,1)$.
3. Demuestra que $\mathcal{F}$ no tiene mínimo en D.

Solución 3.

1. La función $\mathcal{F}$ es continua de D en R si usamos la norma H^1 en D. Para el primer término es fácil ver esto, y para el segundo tenemos

$$|u(0)| = \left| \int_{-1}^{0} u'(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{-1}^{0} |u'(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{-1}^{0} |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1},$$

   así que también es continuo. Como $\mathcal{F}$ es también uniformemente continua en conjuntos acotados (porque es la suma de un término cuadrático y uno lineal), se puede extender de forma única a un funcional continuo en $H_0^1(-1,1)$, que es la completación de D en la norma de H^1.

   Alternativamente, se puede observar que la única forma "natural" de extender $\mathcal{F}$ es usar la misma expresión, sustituyendo $u(0)$ por $\int_{-1}^{0} u'(x) \,\mathrm{d}x$. Otra alternativa más para definir $\mathcal{F}(u)$ con $u \in H_0^1(-1,1)$ es mantener la misma expresión de $\mathcal{F}$, interpretando $u(0)$ como el valor en 0 de la función $\tilde{u}$ que es absolutamente continua e igual a u en casi todo punto de $(-1,1)$. Se ha aceptado cualquiera de estos argumentos en la respuesta.

2. Podemos usar el teorema de Lax-Milgram para demostrar que $\tilde{\mathcal{F}}$ tiene un único mínimo, eligiendo

$$a(u,v) := 2\int_{-1}^{1} u'v', \qquad \ell(v) := v(0) = \int_{-1}^{0} v'(x) \,\mathrm{d}x.$$

   El funcional a es bilineal, continuo, simétrico y coercivo como hemos visto en clase. El funcional ℓ es lineal (fácil) y continuo, como hemos demostrado en el apartado anterior. El teorema nos asegura entonces que existe un único mínimo en $H_0^1(-1,1)$, que es además la única $u \in H_0^1(-1,1)$ que cumple

$$2\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x) \,\mathrm{d}x = v(0) \tag{1}$$

   para todo $v \in \mathcal{C}_c^\infty(-1,1)$.

3. La idea es demostrar que la única función u que cumple (1) no puede ser $\mathcal{C}^2$. Si lo fuera, las condiciones de Euler-Lagrange implican que

$$-2 \int_{-1}^{1} u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = v(0) \tag{2}$$

para todo $v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(-1,1)$. (Es importante darse cuenta de que este funcional no es de tipo integral, y no podemos obtener estas condiciones a partir de la condición general; es necesario calcular la derivada direccional en la dirección de v para obtenerlas; por supuesto, es la misma condición que (1).) Aplicándolo para $v \in \mathcal{C}^{\infty}(-1,0)$ y para $v \in \mathcal{C}^{\infty}(0,1)$ vemos que

$$\begin{aligned} u'' &= 0 \qquad \text{en } (-1,0),\\ u'' &= 0 \qquad \text{en } (0,1). \end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{C}^2(-1,1)$ esto implica $u'' = 0$ en $(-1,1)$, lo cual implica que u tiene que ser 0 en $(-1,1)$ debido a las condiciones de borde. Pero la función $u \equiv 0$ no cumple (2), y no puede ser el mínimo.

(Lo que ocurre en este problema es que el mínimo en H_0^1 se alcanza en la función $u(x) := -\frac{1}{4}(|x|-1)$, que no es $\mathcal{C}^2$.)