Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Examen final** 14 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Se considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(x^2 + y'(x)^2\right) dx$ definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0,1] \,:\, y(0) = y(1) = 0, \; \int_0^1 y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra todos los extremales (puntos críticos) de $\mathcal{F}$.

(ii) Discute si $\mathcal{F}$ alcanza o no un mínimo en $\mathcal{D}$. En caso afirmativo, calcula dicho mínimo e indica dónde se alcanza.

(iii) Responde a los apartados anteriores en el caso en que

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0,1] : \int_0^1 y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Se considera el siguiente problema:

$$(P) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\Delta u + x \cdot \nabla u + (|x|^2 + 1)u &= f(x) \quad \text{en} \quad B(0,1), \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad \partial B(0,1), \end{cases}$$

donde $B(0,1)$ es la bola unidad abierta de centro cero y radio uno en $\mathbb{R}^2$, $\partial B(0,1)$ denota su frontera, y $f \in L^2(B(0,1))$.

(i) Plantea la formulación variacional (o débil) del problema, que denotaremos por (P_V). (Es decir: encuentra un espacio de Hilbert X, un funcional bilineal $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u,v) = F(v)$, para todo $v \in X$.)

(ii) Prueba que

$$\int_{B(0,1)} \left(x \cdot \nabla\varphi(x)\, \varphi(x) + (|x|^2 + 1)\varphi(x)^2 \right) dx \geq 0 \qquad (1)$$

para toda función φ en el espacio de Hilbert del item (i).

(iii) Demuestra que existe una única solución del problema (P_V). ¿En qué sentido es solución del problema (P)?.

(iv) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideramos las siguientes reacciones entre cuatro especies químicas A, B, C, D, con constantes de reacción $k_1, k_3, k_3 > 0$:

$$A + B \xrightarrow{k_1} C, \qquad C \xrightarrow{k_2} D, \qquad D \xrightarrow{k_3} 2A$$

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones a, b, c, d de las especies A, B, C, D.

2. Encuentra una ley de conservación que describa la conservación de la masa del sistema.

3. Dadas las concentraciones iniciales $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = c_0$, $d(0) = d_0$, con $a_0, b_0, c_0, d_0 > 0$ como en el apartado anterior, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema cuando $t \to +\infty$?