



Universidad de Granada

Matemática Aplicada

Modelos Matemáticos II
Grado en Matemáticas

Examen final
14 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos). Se considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 (x^2 + y'(x)^2) dx$ definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y(x)^2 dx = 1 \right\}.$$

Se pide:

- (i) Encuentra todos los extremales (puntos críticos) de \mathcal{F} .
- (ii) Discute si \mathcal{F} alcanza o no un mínimo en \mathcal{D} . En caso afirmativo, calcula dicho mínimo e indica dónde se alcanza.
- (iii) Responde a los apartados anteriores en el caso en que

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0, 1] : \int_0^1 y(x)^2 dx = 1 \right\}.$$

Ejercicio 2 (4 puntos). Se considera el siguiente problema:

$$(P) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\Delta u + x \cdot \nabla u + (|x|^2 + 1)u = f(x) & \text{en } B(0, 1), \\ u = 0 & \text{en } \partial B(0, 1), \end{cases}$$

donde $B(0, 1)$ es la bola unidad abierta de centro cero y radio uno en \mathbb{R}^2 , $\partial B(0, 1)$ denota su frontera, y $f \in L^2(B(0, 1))$.

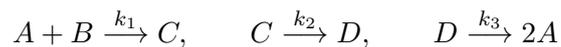
- (i) Plantea la formulación variacional (o débil) del problema, que denotaremos por (P_V) . (Es decir: encuentra un espacio de Hilbert X , un funcional bilineal $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u, v) = F(v)$, para todo $v \in X$.)
- (ii) Prueba que

$$\int_{B(0,1)} \left(x \cdot \nabla \varphi(x) \varphi(x) + (|x|^2 + 1)\varphi(x)^2 \right) dx \geq 0 \tag{1}$$

para toda función φ en el espacio de Hilbert del item (i).

- (iii) Demuestra que existe una única solución del problema (P_V) . ¿En qué sentido es solución del problema (P) ?
- (iv) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

Ejercicio 3 (3 puntos). Consideramos las siguientes reacciones entre cuatro especies químicas A, B, C, D , con constantes de reacción $k_1, k_2, k_3 > 0$:



1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones a, b, c, d de las especies A, B, C, D .
2. Encuentra una ley de conservación que describa la conservación de la masa del sistema.
3. Dadas las concentraciones iniciales $a(0) = a_0, b(0) = b_0, c(0) = c_0, d(0) = d_0$, con $a_0, b_0, c_0, d_0 > 0$ como en el apartado anterior, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema cuando $t \rightarrow +\infty$?