Universidad de Granada · Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	**Examen final** 15 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Se considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(\operatorname{sen}(x) + y'(x)^2\right) \mathrm{d}x$ definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0,1] \, : \, y(0) = y(1) = 0, \, \int_0^1 y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra todos los extremales (puntos críticos) de $\mathcal{F}$.

(ii) Discute si $\mathcal{F}$ alcanza o no un mínimo en $\mathcal{D}$. En caso afirmativo, calcula dicho mínimo e indica dónde se alcanza.

(iii) Responde a los apartados anteriores en el caso en que

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0,1] : \int_0^1 y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, acotado y con frontera $\mathcal{C}^\infty$, y dada $f \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{c}}(\Omega)$ consideramos la siguiente ecuación en derivadas parciales en Ω para una incógnita $u = u(x)$, $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\Delta u + \lambda x \cdot \nabla u = f \qquad \text{en } \Omega,$$

con condición de contorno $u = 0$ en $\partial\Omega$.

1. Da una definición razonable de solución clásica de esta ecuación.
2. Demuestra que una solución clásica de la ecuación anterior con la condición de contorno dada debe cumplir
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega v x \cdot \nabla u = - \int_\Omega f v \tag{1}$$
para todo $v \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$.
3. Demuestra que para $|\lambda|$ suficientemente pequeño existe una única $u \in H^1_0(\Omega)$ que cumpla (1) para todo $v \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$.
4. En el caso de $\Omega = (0,1)$, demuestra que la ecuación planteada al principio tiene una única solución para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideramos las siguientes reacciones entre tres especies químicas A, B, C, con constantes de reacción $k_1, k_2, k_3 > 0$:

$$2A \xrightarrow{k_1} B, \qquad A + B \xrightarrow{k_2} C, \qquad 3B \xrightarrow{k_3} 2C.$$

1. (0,5 puntos) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones a, b, c de las especies A, B, C.

2. (0,5 puntos) Encuentra una ley de conservación que describa la conservación de la masa del sistema.

3. (0,75 puntos) Suponemos que las concentraciones iniciales son $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = c_0$, con $a_0, b_0, c_0 > 0$. ¿Es cierto que $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ son no negativas para todo $t \geq 0$? ¿Existe solución definida en $[0, +\infty)$ del sistema de ecuaciones ordinarias con estas condiciones iniciales?

4. (0,75 puntos) Dadas las concentraciones iniciales $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = c_0$, con $a_0, b_0, c_0 > 0$ como en el apartado anterior, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema cuando $t \to +\infty$?

5. (0,5 puntos) ¿Puedes demostrar rigurosamente que la solución (con condiciones iniciales positivas) converge al equilibrio del apartado anterior?