



Universidad de Granada

Matemática Aplicada

Modelos Matemáticos II

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Examen final

15 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos). Se considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 (\sin(x) + y'(x)^2) dx$ definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y(x)^2 dx = 1 \right\}.$$

Se pide:

- (i) Encuentra todos los extremales (puntos críticos) de \mathcal{F} .
- (ii) Discute si \mathcal{F} alcanza o no un mínimo en \mathcal{D} . En caso afirmativo, calcula dicho mínimo e indica dónde se alcanza.
- (iii) Responde a los apartados anteriores en el caso en que

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0, 1] : \int_0^1 y(x)^2 dx = 1 \right\}.$$

Ejercicio 2 (4 puntos). Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, acotado y con frontera C^∞ , y dada $f \in C_c^2(\Omega)$ consideramos la siguiente ecuación en derivadas parciales en Ω para una incógnita $u = u(x)$, $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Delta u + \lambda x \cdot \nabla u = f \quad \text{en } \Omega,$$

con condición de contorno $u = 0$ en $\partial\Omega$.

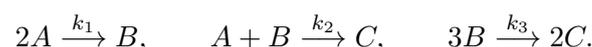
1. Da una definición razonable de solución clásica de esta ecuación.
2. Demuestra que una solución clásica de la ecuación anterior con la condición de contorno dada debe cumplir

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \lambda \int_{\Omega} v x \cdot \nabla u = - \int_{\Omega} f v \tag{1}$$

para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

3. Demuestra que para $|\lambda|$ suficientemente pequeño existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumpla (1) para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$.
4. En el caso de $\Omega = (0, 1)$, demuestra que la ecuación planteada al principio tiene una única solución para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3 (3 puntos). Consideramos las siguientes reacciones entre tres especies químicas A, B, C , con constantes de reacción $k_1, k_2, k_3 > 0$:



1. (0,5 puntos) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones a, b, c de las especies A, B, C .
2. (0,5 puntos) Encuentra una ley de conservación que describa la conservación de la masa del sistema.
3. (0,75 puntos) Suponemos que las concentraciones iniciales son $a(0) = a_0, b(0) = b_0, c(0) = c_0$, con $a_0, b_0, c_0 > 0$. ¿Es cierto que $a(t), b(t), c(t)$ son no negativas para todo $t \geq 0$? ¿Existe solución definida en $[0, +\infty)$ del sistema de ecuaciones ordinarias con estas condiciones iniciales?
4. (0,75 puntos) Dadas las concentraciones iniciales $a(0) = a_0, b(0) = b_0, c(0) = c_0$, con $a_0, b_0, c_0 > 0$ como en el apartado anterior, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema cuando $t \rightarrow +\infty$?
5. (0,5 puntos) ¿Puedes demostrar rigurosamente que la solución (con condiciones iniciales positivas) converge al equilibrio del apartado anterior?