Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	**Examen final y soluciones** 15 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Se considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(\operatorname{sen}(x) + y'(x)^2\right) \mathrm{d}x$ definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{C^2[0,1] \,:\, y(0) = y(1) = 0, \ \int_0^1 y(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra todos los extremales (puntos críticos) de $\mathcal{F}$.

(ii) Discute si $\mathcal{F}$ alcanza o no un mínimo en $\mathcal{D}$. En caso afirmativo, calcula dicho mínimo e indica dónde se alcanza.

(iii) Responde a los apartados anteriores en el caso en que

$$\mathcal{D} = \left\{C^2[0,1] : \int_0^1 y(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

Solución 1.

1. Podemos reescribir $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 y'(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1 - \cos(1) + \int_0^1 y'(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Para encontrar los extremales es suficiente estudiar el funcional $\widetilde{\mathcal{F}}[y] := \int_0^1 y'(x)^2 \,\mathrm{d}x$ en $\mathcal{D}$. Teniendo en cuenta la restricción integral, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$y''(x) = -\lambda y(x), \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ un parámetro. Esto es un problema de Sturm-Liouville cuyas soluciones en $\mathcal{D}$ son

$$\lambda = n^2\pi^2, \qquad y(x) = \pm\sqrt{2}\operatorname{sen}(n\pi x),$$

con $n \geq 1$ entero. Estos son todos los extremales de $\mathcal{F}$.

2. Por un teorema visto en clase, sabemos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ (y en consecuencia $\mathcal{F}$) alcanza su mínimo en la primera función propia. Es decir, $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo en las dos funciones

$$y(x) = \pm\sqrt{2}\operatorname{sen}(\pi x).$$

El valor del mínimo de $\widetilde{\mathcal{F}}$ es $\lambda = \pi^2$. Por tanto, el valor del mínimo de $\mathcal{F}$ es $1 - \cos(1) + \pi^2$.

3. En el caso del dominio sin condiciones de borde, sabemos que deben sustituirse por $y'(0) = y'(1) = 0$. Los extremales vienen dados ahora por las soluciones en $\mathcal{D}$ del problema

$$y''(x) = -\lambda y(x), \qquad y'(0) = y'(1) = 0,$$

que son

$$\lambda = 0, \qquad y(x) = \pm 1,$$

o bien

$$\lambda = n^2\pi^2, \qquad y(x) = \pm\sqrt{2}\cos(n\pi x),$$

con $n \geq 1$ entero. Estos son todos los extremales de $\mathcal{F}$ en el segundo caso. De nuevo por el resultado visto en clase, el mínimo se alcanza en

$$y(x) = \pm 1,$$

y el valor del mínimo es $1 - \cos(1)$. (En este segundo caso es fácil ver que el mínimo se alcanza en una función constante, ya que de la expresión de $\mathcal{F}$ se ve claramente que el valor de $\mathcal{F}$ no puede ser menor que $1 - \cos(1)$.)

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Dado $\Omega \subseteq B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, acotado y con frontera $\mathcal{C}^\infty$, y dada $f \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{c}}(\Omega)$ consideramos la siguiente ecuación en derivadas parciales en Ω para una incógnita $u = u(x)$, $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\Delta u + \lambda x \cdot \nabla u = f \qquad \text{en } \Omega,$$

con condición de contorno $u = 0$ en $\partial\Omega$.

1. Da una definición razonable de solución clásica de esta ecuación.
2. Demuestra que una solución clásica de la ecuación anterior con la condición de contorno dada debe cumplir
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega v x \cdot \nabla u = -\int_\Omega f v \tag{1}$$
para todo $v \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$.
3. Demuestra que para $|\lambda|$ suficientemente pequeño existe una única $u \in H^1_0(\Omega)$ que cumpla (1) para todo $v \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$.
4. En el caso de $\Omega = (0,1)$, demuestra que la ecuación planteada al principio tiene una única solución para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución 2.

1. Una solución clásica de la ecuación anterior es una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que cumpla la ecuación en cada punto de Ω, y tal que $u = 0$ en todos los puntos de $\partial\Omega$. (Se acepta también $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.)
2. Obtenemos la ecuación (1) multiplicando la EDP por v y usando la fórmula de Green. Observamos que el término de borde desaparece usando que $u = 0$ en $\partial\Omega$.
3. Queremos usar el teorema de Lax-Milgram en $H^1_0(\Omega)$. Para esto definimos
$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega v x \cdot \nabla u, \qquad \ell(v) := -\int_\Omega f v,$$
para $u, v \in H^1_0(\Omega)$. Es fácil ver con estimaciones estándar que a es bililneal y continua, y que ℓ es lineal y continua. Para ver si a es coerciva escribimos
$$\begin{aligned} a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 - \lambda \int_\Omega v x \cdot \nabla v &\geq \int_\Omega |\nabla v|^2 - |\lambda| \int_\Omega |v||x||\nabla v| \\ \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 - |\lambda| \int_\Omega |v||\nabla v| &\geq \int_\Omega |\nabla v|^2 - |\lambda| \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda_\Omega}} \int_\Omega |\nabla v|^2 = \left(1 - \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda_\Omega}}\right) \int_\Omega |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

donde λ_Ω es la constante de Poincaré del dominio Ω. Por tanto, para $|\lambda| < \sqrt{\lambda_\Omega}$ podemos asegurar que a es coerciva, y el teorema de Lax-Milgram asegura que hay una única u que cumpla (1).

Otra forma alternativa de hacer demostrar la coercividad es escribir, usando la fórmula de Green,

$$\int_\Omega vx \cdot \nabla v = \frac{1}{2} \int_\Omega x \cdot \nabla(v^2) = -\frac{d}{2} \int_\Omega v^2.$$

Por tanto,

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{\lambda d}{2} \int_\Omega v^2.$$

Para $\lambda \geq 0$ vemos directamente que a es coerciva, y para $0 > \lambda > -2\lambda_\Omega/d$ podemos escribir

$$a(v,v) \geq \left(1 - \frac{d|\lambda|}{2\lambda_\Omega}\right) \int_\Omega |\nabla v|^2,$$

lo que también demuestra que a es coerciva.

4. En el caso $\Omega = (0,1)$ la ecuación es

$$u'' + \lambda x u' = f, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Para saber si tiene solución única podemos usar la alternativa de Fredholm y estudiar el problema homogéneo

$$u'' + \lambda x u' = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Las soluciones de $u'' + \lambda x u' = 0$ se pueden escribir explícitamente: son

$$u(x) = A + B \int_0^x e^{-\frac{\lambda}{2} y^2} \, \mathrm{d}y,$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Si imponemos las condiciones de borde obtenemos $A = B = 0$, así que la única solución posible es la trivial. El teorema de la alternativa de Fredholm nos dice entonces que la ecuación completa tiene solución única para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideramos las siguientes reacciones entre tres especies químicas A, B, C, D, con constantes de reacción $k_1, k_2, k_3 > 0$:

$$2A \xrightarrow{k_1} B, \qquad A + B \xrightarrow{k_2} C, \qquad 3B \xrightarrow{k_3} 2C.$$

1. (0,5 puntos) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones a, b, c de las especies A, B, C.

2. (0,5 puntos) Encuentra una ley de conservación que describa la conservación de la masa del sistema.

3. (0,75 puntos) Suponemos que las concentraciones iniciales son $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = c_0$, con $a_0, b_0, c_0 > 0$. ¿Es cierto que $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ son no negativas para todo $t \geq 0$? ¿Existe solución definida en $[0, +\infty)$ del sistema de ecuaciones ordinarias con estas condiciones iniciales?

4. (0,75 puntos) Dadas las concentraciones iniciales $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = c_0$, con $a_0, b_0, c_0 > 0$ como en el apartado anterior, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema cuando $t \to +\infty$?

5. (0,5 puntos) ¿Puedes demostrar rigurosamente que la solución (con condiciones iniciales positivas) converge al equilibrio del apartado anterior?

Solución 3. 1. Las ecuaciones ordinarias que dan la evolución en tiempo de las concentraciones de a, b, c son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a = -2k_1 a^2 - k_2 ab, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b = k_1 a^2 - k_2 ab - 3k_3 b^3, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c = k_2 ab + 2k_3 b^3.$$

2. Se comprueba fácilmente que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a + 2b + 3c) = 0$, luego $a + 2b + 3c$ es una cantidad constante en tiempo.

3. La parte derecha de la ecuación ordinaria está dada por

$$f(a, b, c) = (-2k_1 a^2 - k_2 ab, k_1 a^2 - k_2 ab - 3k_3 b^3, k_2 ab + 2k_3 b^3).$$

   Esta función es polinómica, y el teorema de Picard-Lindelöf asegura que existe una única solución, al menos local en tiempo. Además, si la coordenada i del vector $v = (a, b, c)$ es 0 y las demás son no negativas, entonces $(f(v))_i \geq 0$, y esto es válido para $i = 1, 2, 3$. Esto implica que la ecuación conserva la positividad, y las soluciones a, b, c son ≥ 0 para $t \geq 0$. La conservación de la positividad y de la masa (apartado anterior) implican que la solución no puede explotar, y por tanto está definida en $[t, +\infty)$.

4. Buscamos los equilibrios $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ del sistema con $a_\infty, b_\infty, c_\infty \geq 0$, ya que sabemos que se conserva la positividad. De la ecuación de c deducimos que $a_\infty b_\infty = b_\infty^3 = 0$ (ya que ambos términos son no negativos), así que $b_\infty = 0$. De la ecuación de a vemos también que $a_\infty = 0$. Por tanto, los equilibrios son

$$a_\infty = b_\infty = 0, \qquad c_\infty = \text{const.}$$

   El sistema debe converger al único de estos equilibrios que cumpla la ley de conservación

$$a_0 + 2b_0 + 2c_0 = a_\infty + 2b_\infty + 3c_\infty = 3c_\infty,$$

   luego esperamos que

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = \lim_{t \to +\infty} b(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} c(t) = \frac{1}{3}a_0 + \frac{2}{3}b_0 + c_0.$$

5. De las ecuaciones de a de c se ve que las dos son funciones monótonas (ya que sabemos que a, b, c son siempre no negativas). Esto implica que a, c tienen límite cuando $t \to +\infty$ (que debe ser finito, por conservación de la masa), al que llamamos a_∞, c_∞. Integrando en tiempo las ecuaciones de a y de c obtenemos que

$$\int_0^\infty 2k_1 a(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq a_0 < +\infty, \quad \int_0^\infty k_2 a(t) b(t) \,\mathrm{d}t \leq a_0 < +\infty, \quad \int_0^\infty k_3 b(t)^3 \,\mathrm{d}t \leq c_\infty < +\infty.$$

   Integrando en tiempo la ecuación de b, esto demuestra que $b(t)$ tiene límite cuando $t \to +\infty$, al que llamamos b_∞. Como a, b, c tienen límite cuando $t \to \infty$, vemos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c$ también tienen límite, que debe entonces ser 0. Pasando al límite en las ecuaciones vemos que $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ tiene que ser un equilibrio, y por conservación de la masa tiene que ser el equilibrio dado en el apartado anterior.