Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas & Doble Grado en Matemáticas e Informática	**Examen final** 22 de junio de 2022

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y'(x))^2 + y(x)y'(x) + y'(x) + y(x) \right) \mathrm{d}x$$

y los conjuntos

$$\mathcal{D}_1 = C^2[0,1]\,, \quad \mathcal{D}_2 = \left\{ y \in C^2[0,1] \mid y(0) = y(1) = 0, \ \int_0^1 y(x)\, dx = 1 \right\}.$$

Se pide:

(i) Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_1$ y en $\mathcal{D}_2$.

(ii) Comprueba que el problema

$$\min_{y \in \mathcal{D}_2} \mathcal{F}[y]$$

tiene solución y encuéntrala.

Ejercicio 2. Se considera el siguiente problema:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{rll} -\epsilon \Delta u + \beta(x) \cdot \nabla u + \alpha(x) u & = f(x) & \text{en } \ \Omega, \\ u & = 0 & \text{en } \ \partial\Omega, \end{array} \right.$$

donde Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^d$ con frontera $\partial\Omega$ regular, $\epsilon > 0$, $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\Omega)$, $\beta \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\Omega)^d$ una función vectorial y $f \in L^2(\Omega)$.

(i) Plantea la formulación variacional del problema.[1]

(ii) Suponiendo que

$$\int_\Omega \left(\beta(x) \cdot \nabla\varphi(x)\, \varphi(x) + \alpha(x)\varphi(x)^2 \right) dx \geq 0 \tag{1}$$

para toda función φ en el espacio funcional del item (i), demuestra que existe una única solución del problema (P).[2]

(iii) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

[1] Es decir, encuentra un espacio de Hilbert X, un funcional bilineal $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u,v) = F(v)$, para todo $v \in X$

[2] Puede ser de utilidad usar que

$$|||u||| := \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$.

Ejercicio 3. Consideramos el siguiente sistema de reacciones químicas:

$$A + B \xrightarrow{\lambda} C, \qquad B + C \xrightarrow{\lambda} 3A, \qquad A + C \xrightarrow{\lambda} 3B.$$

Observa que la constante de reacción $\lambda > 0$ es la misma para las tres reacciones.

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales que deben cumplir las densidades $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ de las sustancias A, B, C, dependiendo del tiempo $t \geq 0$.

2. Encuentra una cantidad conservada m del sistema, de la forma $m(t) = c_1 a(t) + c_2 b(t) + c_3 c(t)$ con $c_1, c_2, c_3 > 0$. (Es decir, tal que $m'(t) = 0$ para cualquier solución a, b, c).

3. Encuentra todos los equilibrios posibles del sistema.

4. Suponiendo que el sistema converge a cierto equilibrio $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$ con $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ estrictamente positivos, y suponiendo que $a(0) = b(0) = c(0) = 1$, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema?