



Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (y'(x))^2 + y(x)y'(x) + y'(x) + y(x) \right) dx$$

y los conjuntos

$$\mathcal{D}_1 = C^2[0, 1], \quad \mathcal{D}_2 = \left\{ y \in C^2[0, 1] \mid y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y(x) dx = 1 \right\}.$$

Se pide:

- (i) Calcula las extremales de \mathcal{F} en \mathcal{D}_1 y en \mathcal{D}_2 .
- (ii) Comprueba que el problema

$$\min_{y \in \mathcal{D}_2} \mathcal{F}[y]$$

tiene solución y encuéntrala.

Ejercicio 2. Se considera el siguiente problema:

$$(P) \quad \begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta(x) \cdot \nabla u + \alpha(x)u = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un abierto no vacío de \mathbb{R}^d con frontera $\partial\Omega$ regular, $\epsilon > 0$, $\alpha \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, $\beta \in \mathcal{C}_c(\Omega)^d$ una función vectorial y $f \in L^2(\Omega)$.

- (i) Plantea la formulación variacional del problema.¹
- (ii) Suponiendo que

$$\int_{\Omega} \left(\beta(x) \cdot \nabla \varphi(x) \varphi(x) + \alpha(x) \varphi(x)^2 \right) dx \geq 0 \tag{1}$$

para toda función φ en el espacio funcional del item (i), demuestra que existe una única solución del problema (P).²

- (iii) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

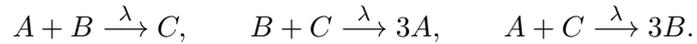
¹Es decir, encuentra un espacio de Hilbert X , un funcional bilineal $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u, v) = F(v)$, para todo $v \in X$

²Puede ser de utilidad usar que

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$.

Ejercicio 3. Consideramos el siguiente sistema de reacciones químicas:



Observa que la constante de reacción $\lambda > 0$ es la misma para las tres reacciones.

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales que deben cumplir las densidades $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ de las sustancias A , B , C , dependiendo del tiempo $t \geq 0$.
2. Encuentra una cantidad conservada m del sistema, de la forma $m(t) = c_1 a(t) + c_2 b(t) + c_3 c(t)$ con $c_1, c_2, c_3 > 0$. (Es decir, tal que $m'(t) = 0$ para cualquier solución a, b, c).
3. Encuentra todos los equilibrios posibles del sistema.
4. Suponiendo que el sistema converge a cierto equilibrio $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$ con $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ estrictamente positivos, y suponiendo que $a(0) = b(0) = c(0) = 1$, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema?