Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas & Doble Grado en Matemáticas e Informática	**Examen final** 22 de junio de 2022

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y]=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(y'(x))^2+y(x)y'(x)+y'(x)+y(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

y los conjuntos

$$\mathcal{D}_1=C^2[0,1]\,,\quad \mathcal{D}_2=\left\{y\in C^2[0,1]\mid y(0)=y(1)=0,\ \int_0^1 y(x)\,dx=1\right\}.$$

Se pide:

(i) Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_1$ y en $\mathcal{D}_2$.

(ii) Comprueba que el problema
$$\min_{y\in\mathcal{D}_2}\mathcal{F}[y]$$
tiene solución y encuéntrala.

Solución 1. (a) Denotemos
$$F(x,y,p):=\frac{1}{2}p^2+yp+p+y\,.$$
La ecuación de Euler-Lagrange asociada a F es
$$0=F_y-\frac{d}{dx}(F_p)=p+1-\frac{d}{dx}(p+y+1)=1-y''\,,$$
de donde se desprende que
$$y(x)=\frac{x^2}{2}+Ax+B\,,\quad A,B\in\mathbb{R}\,.$$
En el caso de $\mathcal{D}_1$ las condiciones de contorno vienen dadas por
$$0=F_p(0,y(0),y'(0))=y(0)+y'(0)+1\,,\quad 0=F_p(1,y(1),y'(1))=y(1)+y'(1)+1\,.$$
De la primera condición de contorno se deduce que $A+B+1=0$. De la segunda, que $2A+B+\frac{5}{2}=0$. En consecuencia, $A=-\frac{3}{2}$ y $B=\frac{1}{2}$, luego la única extremal de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_1$ viene dada por
$$y(x)=\frac{1}{2}\big(x^2-3x+1\big)\,.$$

En $\mathcal{D}_2$ el funcional puede reescribirse de la siguiente forma, dado que $y(0)=y(1)=0$:
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y]&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(y'(x))^2+\frac{1}{2}(y(x)^2)'+y'(x)+y(x)\right)dx\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(y'(x))^2+y(x)\right)dx\end{aligned}$$

Definimos $F(x,y,p) := \frac{1}{2}p^2 + y$. Como $\mathcal{D}_2$ contiene una ligadura, rectificamos F de la siguiente manera:

$$F^\star(x,y,p) = \frac{1}{2}p^2 + y - \lambda y\,.$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $F^\star$ es

$$y'' - (1-\lambda) = 0\,,$$

cuyas soluciones son todas las funciones de la forma $y(x) = \frac{1-\lambda}{2}x^2 + Cx + D$, con $C, D \in \mathbb{R}$. Imponiendo las condiciones de contorno resulta

$$0 = y(0) = D\,, \quad 0 = y(1) = \frac{1-\lambda}{2} + C\,,$$

de donde se desprende que ha de ser

$$y(x) = \frac{1-\lambda}{2}(x^2 - x)\,.$$

Finalmente hace falta escoger el multiplicador de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que se satisfaga la ligadura:

$$1 = \int_0^1 y(x)\,dx = \frac{1-\lambda}{2}\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \frac{\lambda - 1}{12} \Longleftrightarrow \lambda = 13\,.$$

Por tanto, la única extremal de $\mathcal{F}[$ en $\mathcal{D}_2$ viene dada por

$$y(x) = -6(x^2 - x)\,.$$

(b) Para $F(x,y,p) := \frac{1}{2}p^2 + y$ se tiene $F_{yy} = F_{yp} = 0$, $F_{pp} = 1$. Por consiguiente, F es convexa en $(y,p) \in \mathbb{R}^2$. Por otra parte, el conjunto $\mathcal{D}_2$ es claramente convexo. En conclusión, existe el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_2$ y tiene que alcanzarse en la función $y(x) = -6(x^2 - x)$. El valor de dicho mínimo es

$$\mathcal{F}[-6(x^2 - x)] = \int_0^1 \big(18(2x-1)^2 - 6(x^2 - x)\big)\,dx = 7\,.$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)**.** Se considera el siguiente problema:

$$(P) \quad \begin{cases} -\epsilon\Delta u + \beta(x)\cdot\nabla u + \alpha(x)u & = f(x) \quad \text{en } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un compacto de $\mathbb{R}^d$ con frontera $\partial\Omega$ regular, $\epsilon > 0$, $\alpha \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, $\beta \in \mathcal{C}_c(\Omega)^d$ una función vectorial y $f \in L^2(\Omega)$.

(i) Plantea la formulación variacional del problema.[1]

(ii) Suponiendo que

$$\int_\Omega \Big(\beta(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\varphi(x) + \alpha(x)\varphi(x)^2\Big)dx \geq 0 \tag{1}$$

para toda función φ en el espacio funcional del item (i), demuestra que existe una única solución del problema (P).[2]

(iii) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

[1] Es decir, encuentra un espacio de Hilbert X, un funcional bilineal $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u,v) = F(v)$, para todo $v \in X$

[2] Puede ser de utilidad usar que

$$|||u||| := \left(\int_\Omega |u'(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$.

Solución 2. (i) El espacio de Hilbert con el que vamos a trabajar, motivado por las condiciones de contorno, es $H_0^1(\Omega)$. Definimos la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \Big(\epsilon \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x) + \beta(x)\cdot\nabla u(x)\,\varphi(x) + \alpha(x)u(x)\varphi(x)\Big)\,dx\,.$$

Es fácil comprobar, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que la forma bilineal está bien definida a partir de las propiedades de α, β (que son funciones continuas sobre el compacto Ω y, por tanto, acotadas) y del hecho de que $u,\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Por otra parte, definimos la forma lineal $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$F(v) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

De nuevo, podemos asegurar que F está bien definida para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(ii) Usemos el teorema de Lax-Milgram para dar respuesta a este apartado. La forma bilineal es continua ya que

$$\begin{aligned}|a(u,\varphi)| &\le \epsilon\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\,\text{máx}\{\epsilon, \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\}|||u|||\,|||\varphi|||\,,\end{aligned}$$

donde hemos considerado $|||\cdot|||$, que es una norma equivalente a la usual en $H_0^1(\Omega)$ (de ahí la constante C).

Igualmente, F es continua en $H_0^1(\Omega)$ ya que

$$|F(\varphi)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}|||\varphi|||\,.$$

Por otro lado, la forma bilineal es coerciva puesto que

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_\Omega \Big(\epsilon|\nabla u(x)|^2 + \beta(x)\cdot\nabla u(x)\,u(x) + \alpha(x)u(x)^2\Big)dx \\ &\ge \epsilon\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx = \epsilon|||u|||^2\,,\end{aligned}$$

en virtud de (1). En este caso la constante de coercividad es $\epsilon > 0$.

Por tanto, tenemos una igualdad entre una forma bilineal, continua y coerciva y una forma lineal continua sobre $H_0^1(\Omega)$ de la que deducimos la existencia de una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ que es solución del problema variacional

$$(P_V) = \left\{\begin{array}{rl} \text{encontrar} & u \in H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que} & a(u,\varphi) = F(\varphi),\ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right.$$

Como comentamos en la parte teórica de este tema, el hecho de que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ implica que la solución está, además, en $H^2(\Omega)$, por lo que el problema (P) es satisfecho en casi todo punto de Ω.

(iii) El teorema de Lax-Milgram no asegura que el problema (P) (o su equivalente variacional (P_V)) admita una formulación equivalente en términos de un problema de minimización, toda vez que el funcional $a(\cdot,\cdot)$ no es simétrico.

Ejercicio 3 (2,5 puntos)**.** Consideramos el siguiente sistema de reacciones químicas:

$$A + B \xrightarrow{\lambda} C,\qquad B + C \xrightarrow{\lambda} 3A,\qquad A + C \xrightarrow{\lambda} 3B.$$

Observa que la constante de reacción $\lambda > 0$ es la misma para las tres reacciones.

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales que deben cumplir las densidades $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ de las sustancias A, B, C, dependiendo del tiempo $t \ge 0$.

2. Encuentra una cantidad conservada m del sistema, de la forma $m(t) = c_1a(t) + c_2b(t) + c_3c(t)$ con $c_1, c_2, c_3 > 0$. (Es decir, tal que $m'(t) = 0$ para cualquier solución a, b, c).

3. Encuentra todos los equilibrios posibles del sistema.

4. Suponiendo que el sistema converge a cierto equilibrio $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$ con $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ estrictamente positivos, y suponiendo que $a(0) = b(0) = c(0) = 1$, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema?

Solución 3.

1. Las ecuaciones que se piden son

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a &= -\lambda ab + 3\lambda bc - \lambda ac \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b &= -\lambda ab - \lambda bc + 3\lambda ac \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c &= \lambda ab - \lambda bc - \lambda ac
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir también en forma matricial como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ab \\ bc \\ ac \end{pmatrix} =: \lambda A \begin{pmatrix} ab \\ bc \\ ac \end{pmatrix}.$$

donde A es la matriz 3×3 que aparece en la primera igualdad.

2. Por ejemplo, una cantidad conservada es

$$m(t) := a(t) + b(t) + 2c(t).$$

Se puede encontrar de varias formas: si consideramos que tanto A como B tienen masa 1, entonces las reacciones son consistentes con el supuesto de que C tiene masa 2, lo cual sugiere la ley de conservación. De forma alternativa, el vector $(1, 1, 2)$ cumple que $(1, 1, 2)A = (0, 0, 0)$ (y se puede encontrar por ejemplo calculando un elemento del núcleo de A^T, la traspuesta de A).

3. Viendo las ecuaciones, los posibles equilibrios tienen que cumplir que (ab, bc, ac) esté en el núcleo de A. Es fácil ver que el núcleo de A está generado por el vector $(4, 2, 2)$, así que los equilibrios de la ecuación deben cumplir

$$(ab, bc, ac) = r(4, 2, 2), \qquad \text{para algún } r \geq 0.$$

   a) Cuando $r = 0$, esto implica que dos de las concentraciones (a, b, c) son 0, y el valor de la otra es libre.

   b) Cuando $r > 0$, esto implica que $a = b = 2\sqrt{r}$, y que $c = 2r/a = \sqrt{r}$, así que los equilibrios en este caso son de la forma

$$(a, b, c) = (2s, 2s, s) \qquad \text{para algún } s > 0.$$

4. Si el sistema converge a un equilibrio con $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$ estrictamente positivos, por el apartado anterior debe ocurrir que

$$(a_\infty, b_\infty, c_\infty) = (2s, 2s, s) \qquad \text{para algún } s > 0.$$

Por la conservación de la masa, tenemos que

$$6s = a_\infty + b_\infty + 2c_\infty = a(0) + b(0) + 2c(0) = 4.$$

Luego $s = 2/3$, $a_\infty = b_\infty = 4/3$, $c_\infty = 2/3$.