Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua

Hisao Fujita Yashima

Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation,
Université 8 Mai 1945, Guelma, Algérie
y Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Italia

1. Introducción

El objetivo de esta investigación es modelizar el movimiento de la atmósfera teniendo en cuenta la transición de fase del agua en la atmósfera, es decir, modelizar los fenómenos atmosféricos incluyendo la formación de nubes, la lluvia y la nieve. Tratamos de tomar en consideración también el efecto térmico de la radiación en la atmosfera.

El modelo que proponemos consiste en un sistema de ecuaciones a las derivadas parciales con algunos operadores integrales. Las cantidades físicas principales que consideramos en nuestro sistema de ecuaciones son la densidad del aire seco ϱ (aquí por "aire seco" entendemos la parte del aire diferente de H_2O), la densidad del vapor de agua π, la densidad del agua líquida $\sigma_l(m)$ contenida en las gotitas de agua de masa m, la densidad del agua solidificada $\sigma_s(m)$ contenida en los cristales de hielo de masa m, la velocidad del aire $v = (v_1, v_2, v_3)$ y la temperatura T; aquí tratamos la masa m de las gotitas y de los cristales de hielo como una variable continua. Consideraremos la presión como función de la densidad y de la temperatura, mientras la velocidad de las gotitas de agua y la velocidad de los cristales de hielo pueden ser determinadas por la velocidad del aire v y la masa m de cada gotita de agua y de cada cristal de hielo. Consideraremos también la fuente del calor debida a la radiación.

En esta orientación algunos scientificos propusieron modelos matemáticos (véanse por ejemplo [10], [8]), que daban unas características importantes, pero no incluían todas las interacciones que consideramos en nuestro sistema de ecuaciones.

El presente trabajo fué presentado en la *10-th International Conference on Operations Research* tenida en marzo de 2012 en La Habana.

2. Propiedades físicas de los fenómenos considerados

Nuestra modelación se basa en la mecánica de los fluidos y la descripción de la microfísica. En efecto, el movimiento del aire en general puede ser descrito por el sistema de ecuaciones bien conocido del fluido compresible general (gas viscoso y termoconductor), que se puede encontrar por ejemplo en [7]. Por otra parte, como los aspectos de la microfísica y sus descripciones matemáticas no son bien conocidos por los investigadores matemáticos, tenemos que precisar las propiedades microfísicas que tomamos en consideración; para ellas consultamos [11], [14], [16], [6] y otros.

1) Densidad del vapor saturado

En primer lugar recordemos la *densidad del vapor saturado*. En efecto, en cada temperatura dada T está determinada la densidad del vapor de agua saturado, que denotamos mediante $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ cuando ésa es considerada sobre la superficie del agua liquida y mediante $\overline{\pi}_{s,2}(T)$ cuando ésa es considerada sobre la superficie del hielo. Es útil recordar que la densidad del vapor saturado depende muy sensiblemente de la temperatura (es una función creciente de la temperature T), por ejemplo los valores aproximados de $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ es

$$(2.1) \qquad \overline{\pi}_{s,1}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs,1}(T)}{R_0 T}, \qquad \overline{p}_{vs,1}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \qquad E_0 = 6,107 \quad (mbar)$$

(véase por ejemplo [11]), donde R_0 es la constante universal de los gases, mientras μ_h la masa molar de H_2O; $\overline{p}_{vs,1}(T)$ es llamada habitualmente *presión del vapor saturado*.

2) Calor latente

En segundo lugar, recordemos que el *calor latente* juega un papel muy importante en la transición de fase del agua en la atmosfera, dando y absorbiendo la energía térmica al aire, cuando se realiza la transición de fase. Mediante L_{gl} denotemos el calor latente de la transición gas-líquido, mediante L_{ls} el de la transición líquido-sólido y mediante L_{gs} el de la transición gas-sólido. Sus valores aproximativos son

$$(2.2) \qquad L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72\,T)10^3 \ (J/kg), \qquad L_{ls} \approx 33510^3 \ (J/kg)$$

(véase por ejemplo [11]), mientras $L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}$.

3) Velocidad de la transición de fase

En lo que concierne a la velocidad de la transición de fase, como primera aproximación supongamos que la cantidad de condensación/evaporación sobre una gotita es proporcional al producto de la densidad del vapor excedente a la del vapor saturado, $\pi - \overline{\pi}_{s,1}(T)$, y de la superficie $S_l(m)$ de la gotida (de masa m); expresando la cantidad de condensación/evaporación por unidad de masa del agua líquida de las gotitas y denotandola con h_{gl}, esta hipótesis se expresa por

$$(2.3) \qquad h_{gl} = h_{gl}(T, \pi; m) = K_1 m^{-1} S_l(m)(\pi - \overline{\pi}_{s,1}(T)).$$

Análogamente, supongamos que la cantidad h_{gs} de sublimación sobre un cristal de hielo de masa m (por unidad de masa de hielo) es dada por

$$(2.4) \qquad h_{gs} = h_{gs}(T, \pi; m) = K_2 m^{-1} S_s(m)(\pi - \overline{\pi}_{s,2}(T)),$$

donde $S_s(m)$ es la superficie de un cristal de hielo de masa m. Además denotemos por $K_{ls}(T, m)$ el índice de solidificación y por $K_{sl}(T, m)$ el de fusión.

4) Aparición y desaparición de gotitas y cristales de hielo

En la Naturaleza no existen gotitas (ni cristales de hielo) de diámetro menor que un valor critico, ya que las gotitas muy pequeñas tendrían una curvatura muy elevada, que ocasiona la evaporación más rápida; la condesación del agua se realiza sólo su polvos suspendidos en el aire, llamados *aerosoles*, de diámetro mayor que el valor critico. Además, se observa que en la atmósfera, incluso cuando la temperatura está inferior a 0^oC, al principio se forman gotitas de agua y sucesivamente ellas se solidifican con una probabilidad que depende de la temperatura T y de la masa m de la gotita. Por eso es conveniente introducir funciones $g_0(m)$, $g_1(m)$ y $g_2(m)$ de m, una constante N^* y una función $\tilde{N}$ de σ_l y σ_s (N^* y $\tilde{N}$ representarían el número de aerosoles existentes por unidad de volumen y el de aerosoles ya contenidos en gotitas o critales de hielo) y suponer que la cantidad de nuevas gotitas creadas de masa m, la de gotitas de masa m que desaparecen y la de cristales de hielo de masa m que desaparecen por unidad de tiempo y volumen son dadas por

$$g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma_l, \sigma_s)]^+[\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^+, \tag{2.5}$$

$$g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^- \sigma_l, \tag{2.6}$$

$$g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{s,2}(T)]^- \sigma_s. \tag{2.7}$$

Las cantidades (2.5)-(2.7) se expresan como las de masa (y no como número de gotitas o de cristales de hielo).

5) Coagulación

Si una gotita de masa m y una de masa m' se encuentran, dos gotitas se convierten en una gotia de masa $m + m'$, es decir tiene lugar el proceso de coagulación de gotitas. Describiremos la variación de la densidad del agua líquida $\sigma_l(m)$ debida a las coagulaciones, denotando por $\beta_l(m, m')$ la probabilidad (normalizada para la masa de agua) de encuentro entre una gotita de masa m y una de masa m' (véase por ejemplo [18]). Cuando dos cristales de hielo se encuentran, no necesariamente se convierten en un pedazo de hielo. Pero desde el punto de vista matemático, podemos describir de manera análoga este proceso de coagulación de cristales de hielo, introduciendo una cierta probabilidad $\beta_s(m, m')$ de coagulación entre un cristal de hielo de masa m y uno de masa m'.

Hay también encuentros entre un cristal de hielo y una gotita. En efecto, como decíamos antes, por debajo de 0^oC pueden coexistir gotitas de agua líquida y cristales de hielo. La presencia de gotitas de agua líquida en la temperatura inferior a la de fusión debe ser considrada come sobrefusión que se mantiene por la falta de núcleos de congelación. Recordemos que, por otra parte, los cristales de hielo son óptimos núcleos de congelación. Por eso podemos suponer que, si se encuentran una gotita de agua y un cristal de hielo en tal temperatura, se convierten en un cristal de hielo. Por lo tanto para describir este proceso es suficiente introducir la probabilidad $Z_{ls}(m, m')$ de encuentro entre un cristal de hielo de masa m y una gotita de masa m'.

6) Efecto térmico de la radiación

L'absorción y la emisión de la radiación por la atmósfera provocan la variación de la temperatura. En ecuaciones generales de nuestro modelo denotaremos por E_{rad} el efecto térmico de la radiación, mientras examinaremos las relaciones específicas de la radiación y el calor en el aire en el epígrafe 6.

3. Sistema de ecuaciones

Teniendo en cuenta las relaciones que hemos recordado en el epígrafe precedente, proponemos un sistema de ecuaciones para describir el movimiento del aire. La estructura básica de este sistema es la de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos, en particular para un gas viscoso termoconductor (véase [7]). De la manera análoga al caso de un gas ideal, utilizamos la expresión de la presión p dada por

$$p = R_0(\varrho {\mu_a}^{-1} + \pi {\mu_h}^{-1})T,$$

donde R_0 es la constante universal de los gasos, mientras μ_a y μ_h son la masa molar media del aire seco y la del agua respectivamente.

En esta hipótesis la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se traduce en

$$(3.1) \qquad (\varrho+\pi)\big(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v\big) = \eta\Delta v + \big(\zeta + \frac{\eta}{3}\big)\nabla(\nabla\cdot v) +$$

$$-R_0\nabla((\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T) - \Big[\int_0^\infty (\sigma_l(m) + \sigma_s(m))dm + \varrho + \pi\Big]\nabla\Phi,$$

donde Φ es el geopotencial, mientras η y ζ son los coeficientes de viscosidad. El término $\int_0^\infty (\sigma_l(m)+\sigma_s(m))dm\nabla\Phi$ resulta del principio de acción-reacción y del efecto de la fricción entre las gotitas y los cristales de hielo y el aire (véanse (3.7), (3.8)).

Cuanto a la ley de la conservación de la energía, tenemos que añadir a la ecuación clasica del balance de la energía de la dinamica del gas los términos que representan el efecto térmico de la radiación y el de la transición de fase de H_2O. Así tenemos

$$(3.2) \qquad (\varrho+\pi)c_v\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\Big) = \kappa\Delta T - R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T\nabla\cdot\vec{v} +$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla\cdot v)^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl} + L_{ls}H_{ls} + L_{gs}H_{gs},$$

donde c_v y κ son el calor específico y el coeficiente de conductividad térmica respectivamente, mientras H_{gl}, H_{gs} y H_{ls} son la cantidad por unidad de tiempo y de volumen de condensación o evaporación, la de sublimación y la de solidificación o fusión del agua; para H_{gl} y H_{gs} tenemos las relaciones

$$H_{gl}(T,\pi,\sigma_l(\cdot)) = \int_0^\infty h_{gl}(m)\sigma_l(m)dm, \qquad H_{gs}(T,\pi,\sigma_s(\cdot)) = \int_0^\infty h_{gs}(m)\sigma_s(m)dm.$$

Puesto que para las componentes del aire diferentes de H_2O en las temperaturas normales de la atmosfera no hay la transición de fase, podemos considerar la ecuación de continuidad clasica para la densidad ϱ del aire seco. Así tenemos la ecuación

$$(3.3) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho v) = 0.$$

Para la densidad π del vapor de agua, tenemos que tener en cuenta su variación debida a la cantidad de condensation/evaporación H_{gl} y la de sublimación H_{gs}. Por lo tanto tenemos que considerar la ecuación

$$(3.4) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma_l(\cdot)) - H_{gs}(T,\pi,\sigma_s(\cdot)).$$

En lo que concierne la densidad $\sigma_l(m)$ del agua líquida contenida en gotitas de masa m, su variación está determinada por el crecimiento (resp. la disminución) de gotitas por la condensación sobre (resp. evaporación desde) su superficie, la solidificación de gotitas, la fusión de critales de hielo, la aparición de nuevas gotitas por la condensación sobre aerosoles, desaparición de gotitas por el cumplimiento de evaporación y el proceso de coagulación. Así la variación de $\sigma_l(m)$ se describe por la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_l u_l) + \frac{\partial (m h_{gl} \sigma_l)}{\partial m} = [h_{gl} - K_{ls}(T,m)]\sigma_l + \tag{3.5}$$

$$+K_{sl}(T,m)\sigma_s + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma_l,\sigma_s)]^+[\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^- \sigma_l +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m-m',m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' - m\int_0^\infty \beta_l(m,m')\sigma_l(m)\sigma_l(m')dm' +$$

$$-m\sigma_l(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m',m)\sigma_s(m')dm',$$

donde u_l es la velocidad de las gotitas.

De manera análoga, la consideración del crecimiento o la disminución de cristales de hielo por la sublimación, la solidificación de gotitas, la fusión de critales de hielo, desaparición de cristales de hielo por el cumplimiento de sublimación y el proceso de coagulación nos conduce a la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_s u_s) + \frac{\partial (m h_{gs} \sigma_s)}{\partial m} = [h_{gs} - K_{sl}(T,m)]\sigma_s + \tag{3.6}$$

$$+K_{ls}(T,m)\sigma_l - g_2(m)[\pi - \bar{\pi}_{s,2}(T)]^- \sigma_s + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m-m',m')\sigma_s(m')\sigma_s(m-m')dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta_s(m,m')\sigma_s(m)\sigma_s(m')dm' + m\int_0^m Z_{ls}(m-m',m')\sigma_s(m-m')\sigma_l(m')dm' +$$

$$-m\sigma_s(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m,m')\sigma_l(m')dm',$$

donde u_s es la velocidad de los cristales de hielo.

Para las velocidades u_l y u_s de las gotitas y de los cristales de hielo, admitamos que ellas son determinadas por

$$u_l(m,x,t) = v(x,t) - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \tag{3.7}$$

$$u_s(m,x,t) = v(x,t) - \frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi, \tag{3.8}$$

donde $\alpha_l(m)$ y $\alpha_s(m)$ son los coeficientes de fricción entre el aire y las gotitas y entre el aire y los cristales de hielo.

4. Solución local del sistema general

Bajo condiciones oportunas se peude demostrar que el sistema ligeramente modificado de las ecuaciones (3.1)–(3.6) admite en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño una y una sola solución ([15], véanse también [5], [3]).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto limitado con una frontera regular. Supongamos las condiciones

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.1}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = \bar{T}^* \in W_q^{2-\frac{1}{q}, 1-\frac{1}{2q}}(\partial\Omega \times]0, t_1[\,), \qquad \inf_{(x,t)\in\partial\Omega\times\,]0,t_1[} \bar{T}^*(x,t) > 0, \qquad t_1 > 0, \tag{4.2}$$

$$v(\cdot, 0) = v_0(\cdot) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega), \qquad v_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.3}$$

$$T(\cdot, 0) = T_0(\cdot) \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} T_0(x) > 0, \qquad T_0\big|_{\partial\Omega} = \bar{T}^*\big|_{t=0}, \tag{4.4}$$

$$\varrho(\cdot, 0) = \varrho_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x) > 0, \tag{4.5}$$

$$\pi(\cdot, 0) = \pi_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} \pi_0(x) > 0, \tag{4.6}$$

$$\sigma_l(\cdot, \cdot, 0) = \sigma_{l,0}(\cdot, \cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \qquad \sigma_{l,0}(\cdot; \cdot) \geq 0, \tag{4.7}$$

$$\sigma_s(\cdot, \cdot, 0) = \sigma_{s,0}(\cdot, \cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \qquad \sigma_{s,0}(\cdot; \cdot) \geq 0, \tag{4.8}$$

$$\exists \bar{M}' \geq \bar{m}_a \ \text{ tal que } \ \sigma_{l,0}(m, x) = \sigma_{s,0}(m, x) = 0 \quad \text{si } \ m \in]0, \bar{m}_a] \cup [\bar{M}', \infty[. \tag{4.9}$$

Además supongamos que

$$\Phi \in C^3(\Omega), \qquad \nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \ \partial\Omega \quad (\vec{n} : \text{vector normal sobre } \partial\Omega), \tag{4.10}$$

$$E_{rad} \in L^q(\Omega\times\,]0, t_1[\,), \tag{4.11}$$

$$\beta_l(m', m'') = \beta_s(m', m'') = Z_{ls}(m', m'') = 0 \qquad \text{cuando } \ m' + m'' \geq \bar{M}_\beta < \infty, \tag{4.12}$$

y que $\alpha_l(m)$, $\alpha_s(m)$, $K_{ls}(T, m)$, $K_{sl}(T, m)$, $g_0(m)$, $g_1(m)$, $g_2(m)$, $\beta_l(m, m')$, $\beta_s(m, m')$, $Z_{ls}(m, m')$, $\bar{\pi}_{s,1}(T)$ y $\bar{\pi}_{s,2}(T)$ son funciones regulares.

Finalmente por razones técnicas introducimos la media local π_ϑ de π y con ésta la aproximación de $h_{gl}(m)$, $h_{gs}(m)$, H_{gl}, H_{gs} por

$$\widetilde{h}_{gl}(m) = K_1 m^{-1} S_l(m)(\pi_\vartheta - \bar{\pi}_{s,1}(T)),$$

$$\widetilde{h}_{gs}(m) = K_2 m^{-1} S_s(m)(\pi_\vartheta - \bar{\pi}_{s,2}(T)),$$

$$\widetilde{H}_{gl} = \int_0^\infty \widetilde{h}_{gl}(m)\sigma_l(m)dm, \quad \widetilde{H}_{gs} = \int_0^\infty \widetilde{h}_{gs}(m)\sigma_s(m)dm.$$

Entonces tenemos el

TEOREMA 4.1. *Sean* $p > 4$, $2q > p \geq q > 3$. *Entonces existe un* $\bar{t} > 0$ *tal que el sistema* (3.1)-(3.6) *con la substitución de* $\widetilde{h}_{gl}$, $\widetilde{h}_{gs}$, $\widetilde{H}_{gl}$ *y* $\widetilde{H}_{gs}$ *en lugar de* h_{gl}, h_{gs}, H_{gl} *y* H_{gs} *y con las condiciones* (4.1)-(4.9) *admita, en el intervalo de tiempo* $[0, \bar{t}]$, *una y una sola solución* $(v, T, \varrho, \pi, \sigma_l, \sigma_s)$ *en la clase*

$$v \in W_p^{2,1}(Q_{\bar{t}}), \qquad T \in W_q^{2,1}(Q_{\bar{t}}), \quad T > 0, \qquad \varrho \in C^0([0,\bar{t}]; W_p^1(\Omega)), \tag{4.13}$$

$$\inf_{(x,t)\in Q_{\bar{t}}} \varrho(x,t) > 0, \qquad \pi \in C^0([0,\bar{t}]; W_p^1(\Omega)), \quad \pi \geq 0,$$

$$\sigma_l, \sigma_s \in C^0([0,\bar{t}]; W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega)), \quad \sigma_l, \sigma_s \geq 0,$$

donde

$$\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q_t)} = \|\varphi\|_{L^r(0,t;W_r^2(\Omega))} + \|\partial_t \varphi\|_{L^r(Q_t)}, \qquad Q_t = \Omega \times \,]0,t[\,.$$

El esquema general de la demostración del teorema 4.1 es lo siguiente:

(i) Dados $v = \overline{v}$ y $T = \overline{T}$, se resuelven las ecuaciones (3.3)-(3.6) para ϱ, π, σ y ν.

(ii) Dados $v = \overline{v}$ y $T = \overline{T}$ y construidas las soluciones ϱ, π, σ y ν en la etapa (i), se resuelven las ecuaciones linealizadas de las (3.1)-(3.2).

(iii) Se demuestra que, en un intervalo de tiempo bastante pequeño, el operador que, al dado $(\overline{v}, \overline{T})$, asocia la solución (v, T) de la etapa (ii) es una contracción.

Desde el punto de vista tecnico, en la etapa (i) necesitamos considerar las ecuaciones (3.5)-(3.6) como ecuaciones de transporte en un espacio de las variables "espaciales" m y x. Para las ecuaciones linealizadas de las (3.1)-(3.2) utilizamos las técnicas para las ecuaciones de los fluidos viscosos compresibles desarrolladas desde [17]. Para los detalles, véase [15].

5. Ecuación de las gotitas en caída

La segunda condición de (4.10) no es natural. En efecto, si Φ es el geopotencial, tenemos

$$\nabla\Phi \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

(g es la aceleración de la gravedad) y por eso no se puede hallar un dominio limitado tal que $\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$ ($\vec{n}$: vector normal sobre $\partial\Omega$).

Si $\nabla\Phi \cdot \vec{n} \neq 0$ sobre $\partial\Omega$, no se puede utilizar la técnica debida a la integración por partes que utilizamos para la estimación en los espacios de Sobolev de σ_l y σ_s en la etapa (i) de la demostración del teorema 4.1. Por eso, para resolver neustro sistema de ecuaciones bajo condiciones más naturales, necesitamos examinar las ecuaciones (3.5)-(3.6) con la condición $\nabla\Phi \cdot \vec{n} \neq 0$ sobre $\partial\Omega$. Puesto que no es fácil resolver bajo esta condición las ecuaciones (3.5)-(3.6) y que la ecuación (3.6) tiene más o menos una misma estructura que la ecuación (3.5), tenemos que comenzar por un estudio de la ecuación para σ_l con condiciones suficientemente simples.

Si consideramos el caso del equilibrio entre la densidad real del vapor y la del vapor saturado, es decir $\pi = \bar{\pi}_{s,1}(T)$, y de la temperatura por encima de 0^oC (suponiendo naturalmente que $\sigma_s = 0$), la ecuación (3.5) se reduce a

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_l u_l) = \frac{m}{2} \int_0^m \beta_l(m-m', m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' + \tag{5.1}$$
$$+ m \int_0^\infty \beta_l(m, m')\sigma_l(m)\sigma_l(m')dm'.$$

En primer lugar consideremos el dominio

$$\Omega = \mathbb{R}\times]0,1[= \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < z < 1\}, \tag{5.2}$$

el geopotencial $\nabla\Phi = (0,g)^T$ y el viento constante y horizontal $v = (\overline{v}, 0)$. Esto es un problema en dos dimensiones. Pero se ve fácilmente que un problema análogo en tres dimensiones con $\Omega_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 1\}$, $\nabla\Phi = (0,0,g)^T$, $v = (\overline{v}, 0, 0)$, incluso cuando $\overline{v} = \overline{v}(y)$ es una función de y, se reduce a nuestro problema en dos dimensiones.

Conformemente con (3.7) definamos la velocidad $u = u(m) = u_l(m)$ de una gotita de masa m por la relación

$$u = u_l = u(m) = (\overline{v}, -\frac{g}{\alpha(m)}). \tag{5.3}$$

Si el proceso es estacionario, la ecuación (5.1) se reduce a

$$\nabla_{(x,z)} \cdot (\sigma(m,x,z)u(m)) = \tag{5.4}$$
$$= \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m', x, z)\sigma(m-m', x, z)dm' +$$
$$-m \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, x, z)\sigma(m', x, z)dm'.$$

Vamos a estudiar la ecuación (5.4) con la condición

$$\sigma(m, x, 1) = \overline{\sigma}(m, x), \tag{5.5}$$

suponiendo para la función $\overline{\sigma}(m,x)$ por ejemplo las condiciones:

$$\overline{\sigma}(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \tag{5.6}$$

$$\overline{\sigma}(m,x) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{supp}\,(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \qquad (0 < \overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty), \tag{5.8}$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}, \tag{5.9}$$

donde

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \le m \le \overline{m}_A, \overline{m}_a \le m' \le m-\overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'). \tag{5.10}$$

Entonces tenemos el siguiente resultado ([12]).

Teorema 5.1. *Si $\overline{\sigma}(m,x)$ satisface las condiciones* (5.6)-(5.9), *entonces la ecuación* (5.4) *con la condición* (5.5) *admite una y una sola solución σ en la clase*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]). \tag{5.11}$$

Para demostrar el teorema 5.1 introduzcamos el cambio de variables

$$\xi = x - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$$

y definamos la familia de curvas

$$\gamma_\tau = \{(m,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \xi = \tau - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Entonces podemos escribir la ecuación (5.4) en la forma

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F_z(\sigma(z)), \qquad \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,z), \tag{5.13}$$

con

$$F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m,\xi) =$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm'),$$

donde

$$\tau(m,\xi,z) = \xi + \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \qquad \gamma^{[0,m]}_\tau = \gamma_\tau \cap [0,m]\times\mathbb{R}.$$

mientras η' y η'' son tales que

$$(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}, \quad (m-m',\eta'') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}.$$

En (5.13) $\mu_\gamma(dm')$ denota la medida sobre la curva γ_τ. Naturalmente la condición (5.5) se transforma en

$$\sigma(1) = \sigma(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi). \tag{5.14}$$

Podemos considerar la ecuación (5.13) y la condición (5.14) como el problema de Cauchy para

$$\sigma(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}).$$

Utilizando también una estimación de la norma

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

y estimando el operador integral con la ayuda de la propiedad de la convolución sobre la curva γ_τ, podemos obtener estimaciones necesarias para la resolución de este problema de Cauchy (para los detallos, véase [12]).

Volviendo a la ecuación de evolución, pero simplificando el problema en un dominio

$$0 < z < 1$$

con la velocidad de las gotitas

$$u(m) = -\frac{1}{\alpha(m)}g,$$

la ecuación (5.1) se reduce a

$$\partial_t\sigma(m,t,z) + \partial_z(\sigma(m,t,z)u(m)) = \tag{5.15}$$
$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,z)\sigma(m-m',t,z)dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,t,z)\sigma(m',t,z)dm'.$$

La idea de transformar el problema en una ecuación diferencial ordinaria en un espacio de Banach con el operador integral definido sobre una curva γ_τ nos permite de obtenir la solución global de la ecuación (5.15). Más precisamente, tenemos el

Teorema 5.2. *Supongamos que* $\overline{\sigma}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times[0,1])$ *y* $\overline{\sigma}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ *satisfacen las condiciones*

$$\overline{\sigma}_0(m,z) \geq 0 \quad \textit{c.d. sobre } \mathbb{R}_+\times[0,1], \qquad \overline{\sigma}_1(m,t) \geq 0 \quad \textit{c.d. sobre } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,$$

$$\overline{\sigma}_0(m,z) = 0, \quad \overline{\sigma}_1(m,t) = 0 \qquad \textit{para } m \in [0,\overline{m}_a]\cup[\overline{m}_A,\infty[\,.$$

Entonces la ecuación (5.15) *con la condición a la frontera*

$$\sigma(m,t,1) = \overline{\sigma}_1(m,t) \tag{5.16}$$

y la condición inicial

$$\sigma(m,0,z) = \overline{\sigma}_0(m,z) \tag{5.17}$$

admite una y una sola solución $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times[0,1])$.

Para la demostración del teorema 5.2, véase [4]. En la demostración, además de la idea sobre mencionada, utilizamos la propiedad de "cono de dependencia" para la solución de la ecuación (5.15).

Es fácil ver que, si $\overline{\sigma}_1(m,t)$ no depende de t o $\overline{\sigma}_1(m,t)$ tiende a una función $\overline{\sigma}_1^\infty(m)$ de manera adecuada, la solución σ obtenida en el teorema 5.2 converge a una solución estacionaria.

6. Ecuaciones de la radiación y su efecto térmico

En la ecuación (3.2) hemos introducido el efecto térmico de la radiación E_{rad} y en la construcción de la solución local (teorema 4.1) lo hemos tratado como una función dada. Ahora queremos examinar las relcaciones entre la radiación y la temperatura.

Denotemos por $I_\lambda(x,q)$ la intensidad de la radiación de longitud de onda λ en la dirección $q \in S^2$ al punto $x \in \mathbb{R}^3$ y por $T(x)$ la temperatura al punto $x \in \mathbb{R}^3$. Las funciones I_λ y T pueden depender también del tiempo $t \in \mathbb{R}$, pero en la dinamica de la atmosfera la propagación de la radiación debe ser considerada casi inmediata, de modo que la ecuación que determina la intensidad de la radiación $I_\lambda(x,q)$ no contiene término relativo a la variation en t. En efecto, según la descripción de los físicos (véase por ejemplo [9]), $I_\lambda(x,q)$ debe satisfacer la ecuación

$$-\frac{1}{a_\lambda(x)+r_\lambda(x)}(q\cdot\nabla)I_\lambda(x,q) = I_\lambda(x,q) - J_\lambda(x,q,I_\lambda,T), \tag{6.1}$$

donde

$$J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) = \frac{1}{4\pi}\frac{r_\lambda(x)}{a_\lambda(x)+r_\lambda(x)}\int_{S^2} I_\lambda(x,q')P_\lambda(q',q)dq' + \tag{6.2}$$

$$+\frac{a_\lambda(x)}{a_\lambda(x)+r_\lambda(x)}B[\lambda,T(x)],$$

$$B[\lambda,T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\left(e^{\frac{ch}{k\lambda T}}-1\right)^{-1} \tag{6.3}$$

(en (6.3) c es la velocidad de la luz, h la constante de Planck y k la constante de Boltzmann); se acostumbra llamar $B[\lambda,T]$ la *función de Planck*. En (6.1) (y (6.2)) $a_\lambda(x)$ es el coeficiente de absorción y $r_\lambda(x)P_\lambda(q',q)$ es el de difusión (por desviación o por reflexión), q' siendo la dirección de la radiación entrante y q la de la radiación saliente. Para $a_\lambda(x)$, $r_\lambda(x)$ y $P_\lambda(q',q)$ admitimos que

$$a_\lambda(x)\geq 0, \quad r_\lambda(x)\geq 0, \quad a_\lambda(x)+r_\lambda(x)\leq C<\infty \quad (C:\text{constante}), \tag{6.4}$$

$$P_\lambda(q',q)\geq 0 \quad \forall q',q\in S^2, \qquad \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}P_\lambda(q',q)dq = 1 \quad \forall q'\in S^2. \tag{6.5}$$

Para la temperatura T, en primer lugar consideramos la ecuación estacionaria con una difusión dada por un operador de Laplace, es decir

$$\kappa\Delta T = \nabla\cdot F \qquad (\kappa:\text{constante}>0), \tag{6.6}$$

donde F es definido por

$$F=(F_1,F_2,F_3), \qquad F_j(x)=\int_0^\infty\int_{S^2} I_\lambda(x,q)q_j dq d\lambda. \tag{6.7}$$

El término $\nabla\cdot F$ representa el efecto térmico de la radiación.

Para formular un problema matemático, ponemos la condición de la entrada de la radiación a través de la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω

$$I_\lambda(x^0,q) = I^0_\lambda(x^0,q), \qquad \text{para } \ x\in\partial\Omega,\ q\in S^2_-(x^0), \tag{6.8}$$

$$S^2_-(x^0) = \{q\in S^2 \,|\, \exists\,\varepsilon>0\,,\, x^0+\alpha q\in\Omega,\ \forall\alpha\in\,]0,\varepsilon[\,\},$$

y la condition en la frontera para la temperatura

$$\vec{n}\cdot\nabla T = 0 \qquad \text{sobre } \ \partial\Omega. \tag{6.9}$$

Entonces podemos demostrar el resultado siguiente.

Teorema 6.1. *Sea Ω un abierto limitado de $\mathbb{R}^3$ con la frontera regular. Si $a_\lambda(x)\geq 0$ y $r_\lambda(x)\geq 0$ son suficientemente pequeños, entonces el sistema* (6.1), (6.6) *con las condiciones* (6.8)-(6.9) *admite una solución $(\{I_\lambda\}_{\lambda\in\,]0,\infty[}\,, T)$ en la clase*

$$I_\lambda\in L^\infty(\Omega\times S^2), \quad \forall\lambda\in\,]0,\infty[\,, \qquad T\in H^2(\Omega), \quad \inf_{x\in\Omega} T(x)>0. \tag{6.10}$$

Para la demostración del teorema 6.1, véase [13].

Es útil recordar que la función $B[\lambda,T]$ (véase (6.3)) es muy nolineal. Pero ella posee propiedad de monotonía, lo que nos permite de demostrar la existencia de una solución.

7. Cálculo numérico

Para mostrar la validez de nuestro modelo, naturalmente necesitamos desarrollar el método númerico para las ecuaciones del modelo.

Como primero ejemplo de simulación numérica, consideramos el problema del viento que forma nubes, pasando por encima de las montagnas. Denotemos por $h(x)$ (aquí para simplificar escribimos x en lugar de x_1) la altura de la superficie de la tierre y consideremos el viento que sigue la superficie de la tierre en la dirección de x. La componente en la dirección de la superficie $\big(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}, 0, \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\big)^T$ de la velocidad del viento $v=(v_1,0,v_3)$ está definida por

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}(v_1 + \frac{dh}{dx}v_3). \tag{7.1}$$

Partiendo de las ecuaciones (3.1)-(3.3) y utilizzando esta expresión w de velocidad, podemos formular las ecuaciones del movimiento estacionario en una dimensión, es decir,

$$\frac{\varrho}{\sqrt{1+h'^2}}w\frac{d}{dx}w = f_1\frac{d^2w}{dx^2} + \tag{7.2}$$

$$+f_2 w - \frac{R}{\mu_m\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}\big(\varrho T\big) - \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\varrho g - \alpha w + \gamma,$$

con

$$f_1 = \frac{1}{1+h'^2}\big[\frac{\eta}{3}(3h'^2+4)+\zeta\big],$$

$$f_2 = \frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2\big[-\frac{\eta}{3}(h'^2+4)+\zeta(2h'^2-1)\big] - h'(\zeta+\frac{\eta}{3})h''',$$

$$\varrho c_v \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{dT}{dx} = \kappa\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{R}{\mu_m}\varrho T\frac{d}{dx}\left(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\right)+ \tag{7.3}$$

$$+g_1\left(\frac{d}{dx}w\right)^2 + g_2 w\frac{d}{dx}w + g_3 w^2 + L_{gl}H_{gl},$$

con

$$g_1 = \frac{1}{1+h'^2}\left(\eta\left(\frac{4}{3}+h'^2\right)+\zeta\right),$$

$$g_2 = \frac{-2h'}{(1+h'^2)^2}h''\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right),$$

$$g_3 = \frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2\left(\eta\left(1+\frac{4}{3}h'^2\right)+\zeta h'^2\right),$$

y

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\varrho(x)w(x)}{\sqrt{1+h'^2}}\Big) = 0; \tag{7.4}$$

en la ecuación (7.2) hemos introducido el término de fricción con la superficie de la tierra $-\alpha w$ y el gradiente de la presión de base $-\gamma$.

En realdad es necesario considerar en la ecuación (7.2) la presión debida a todas las componentes del aire. Pero aquí neustro interes principal es examinar el comportamiento de la temperatura, por eso utilizamos una aproximación en la cual para el efecto mecánico la densidad del aire se aproxima por la densidad del aire seco. Por eso de (7.4) resulta que

$$\varrho = \frac{K_\varrho\sqrt{1+h'^2}}{w} \tag{7.5}$$

con una constante K_ϱ. Así podemos substituir la expresión (7.5) en las ecuaciones (7.2)-(7.3) y nuestro sistema (7.2)-(7.4) si reduce a un sistema de dos ecuaciones.

Ahora tenemos que precisar el término $L_{gl}H_{gl}$ que se halla en la ecuación (7.3). Puesto que, según nuestra hipótesis, el mismo aire pasa en todo el camiño, si la densidad del vapor en el punto de partencia es π_0, la en el punto x será $\pi(x) = \pi_0\frac{\varrho(x)}{\varrho_0}$ (ϱ_0 siendo la densidad del aire en el punto de partencia). Entonces la cantidad de H_2O condensada será

$$[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs}(T)]^+, \qquad q_0 = \frac{\pi_0}{\varrho_0}.$$

Recordemos que con el viento los puntos materiales que forman el aire se desplazan, así que, si denotamos con $x(t)$ la posición de un punto material y con $\frac{d}{dt}$ la derivada material, tenemos

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}.$$

Por eso la expresión de H_{gl} está dada por

$$H_{gl} = \frac{d}{dt}[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs}(T(x))]^+ = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs}(T(x))]^+. \tag{7.6}$$

Como la función que se halla en (7.6) es fuertemente no lineal, utilizaremos una aproximación sucesiva. Pero en la aproxiamción sucesiva simple el término $L_{gl}H_{gl}$ crea una oscilación. Para evitarlo, utilizaremos el siguiente esquema de aproximación sucesiva.

Supongamos que tenemos la n-ema aproximación $(w^{[n]}, T^{[n]})$. Entonces definamos $\varrho^{[n]}$ y $\overline{\pi}_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]})$ por

$$\varrho^{[n]} = \frac{K_\varrho\sqrt{1+h'^2}}{w^{[n]}},$$

$$\overline{\pi}_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]}) = \frac{\mu_h}{R\vartheta^{[n]}}E_0 10^{\frac{7{,}63(\vartheta^{[n]}-273{,}15)}{\vartheta^{[n]}-31{,}25}}, \qquad \vartheta^{[n]} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{[k]};$$

observamos que $\vartheta^{[n]}$ es el promedio de $T^{[k]}$, $k = 1, \cdots, n$. Con $\varrho^{[n]}$ y $\overline{\pi}_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]})$ definamos

$$H_{gl}^{[n]} = \frac{w^{[n]}}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}[q_0\varrho^{[n]} - \pi_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]})]^+, \qquad L_{gl}^{[n]} = (3244 - 2{,}72\cdot\vartheta^{[n]})10^3.$$

Definidos $H_{gl}^{[n]}$ y $L_{gl}^{[n]}$, podemos considerar el sistema de ecuaciones para la $n+1$-ema aproximación

$$k_\varrho\frac{dw^{[n+1]}}{dx} = f_1\frac{d^2w^{[n+1]}}{dx^2} + \tag{7.7}$$

$$+f_2w^{[n+1]} - \frac{R}{\mu_m\sqrt{1+h'^2}}k_\varrho\frac{d}{dx}\sqrt{1+h'^2}\frac{T^{[n+1]}}{w^{[n+1]}} - \frac{h'k_\varrho}{w^{[n+1]}}g - \alpha w^{[n+1]} + \gamma,$$

$$k_\varrho c_v\frac{dT^{[n+1]}}{dx} = \kappa\frac{d^2T^{[n+1]}}{dx^2} - \frac{R}{\mu_m}k_\varrho\sqrt{1+h'^2}\frac{T^{[n+1]}}{w^{[n+1]}}\frac{d}{dx}\Big(\frac{w^{[n+1]}}{\sqrt{1+h'^2}}\Big) + \tag{7.8}$$

$$+g_1\Big(\frac{dw^{[n+1]}}{dx}\Big)^2 + g_2w^{[n+1]}\frac{dw^{[n+1]}}{dx} + g_3(w^{[n+1]})^2 + L_{gl}^{[n]}H_{gl}^{[n]}.$$

Las ecuaciones (7.7)-(7.8) son ecuaciones diferenciales del segundo orden. Pero los coeficientes para los términos de la derivada segunda son muy pequeños en comparación con los para los términos de la derivada primera. Así non se puede utilizar directamente el método de elementos finitos. Por eso utilizamos el método de diferencias finitas y resolvemos el problema de Cauchy con el valor de las funciones en el punto inicial y el valor de la derivada primera en el punto inicial. En la utilización de este método, pero, necesitamos introducir algunas modificaciones para evitar el efecto de la instabilidad numérica, que la discontinuidad de la derivada de la parte positiva de una función, $\frac{d}{dx}[q_0\varrho^{[n]} - \pi_{vs}^{[n]}(\theta^{[n]})]^+$, puede provocar. En efecto, utilizamos una aproxiamción pesada de las derivadas

$$\frac{dw}{dx}\Big|_{x=i} \approx \frac{7}{12}w(i+1) - \frac{1}{4}(w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3}w(i-2))N$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=i} \approx (w(i+1) - 2w(i) + w(i-1))N^2$$

y análogamente para T en el esquema de diferencias finitas ($i = 0, 1, \cdots, N-1, N$ siendo los puntos de discretización del esquema).

Con estos métodos hemos calculado la velocidad, la temperatura y la cantidad de H_2O condensada (véanse [1], [2]). El resultado del cálcolo muestra que, si la densidad del vapor en el punto de partencia es suficientemente poca, como es obvio, no hay la condensación del vapor y encima de las montagnas de 1000 metros la temperatura disminuye de 9,80 grados, precisamente como la transformación adiabatica preve. Si por ejemplo la densidad es 14,45 g/m^3 ($= 1,2\,\%$ del aire) y la temperatura es $293,15^o K$ ($20^o C$) en el punto inicial, entonces hay la condensación del vapor a partir del punto de 380 metros de altura y la temperatura disminuye de 6,55 grados en la cima de la montagna de altura 1000 metros, como se observa en la naturaleza. Es decir, nuestro cálculo numérico de la solución de las ecuaciones nos da los valores que la teoria preve.

Referencias

[1] Ayachi A., Aissaoui M. Z., Fujita Yashima, H.: Calcul numérique pour le système d'équations monodimontionnelles du mouvement de l'air passant sur une montagne. Quaderno Dip. Mat. Torino, N. 9, 2011.

[2] Ayachi A., Aissaoui M. Z., Fujita Yashima, H.: Simulation numérique de la formation de nuages par le vent qui passe sur une montagne. En preparación.

[3] H. Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H.: Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sciences Technologie Univ. Constantine*, vol. **31** (2011), pp. 9-17.

[4] H. Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H.: Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute. En preparación.

[5] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z.: Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transitionn de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66-92.

[6] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K.: *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[7] Landau, L. L., Lifchitz, E. M.: *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[8] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang: New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. *Nonlinearity* vol. **5** (1992), pp. 237-288.

[9] K.-N. Liou: *An introduction to atmospheric radiation.* Acad. Press, 2002.

[10] G. I. Martchouk et al.: *Modelación matemática de las circulaciones generales de la atmosfera y del océano* (en ruso). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

[11] L. T. Matveev: *Física de la atmósfera* (en ruso). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[12] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H.: Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. A aparecer en *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*

[13] Messaadia, N., Fujita Yashima, H.: Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et de la température dans l'air. Quaderno Dip. Mat. Torino, N. 3, 2012.

[14] Prodi, F., Battaglia, A.: *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004.

[15] S. Selvaduray, H. Fujita Yashima: Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido. Se publicará en *Memorie Accad. Sci. Torino.*

[16] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X.: *Física de la atmósfera* (en chino). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.

[17] V. A. Solonnikov: Sobre el problema a las condiciones iniciales y a la frontera para las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso compresible (en ruso). *Zapiski Nauch. Sem. LOMI*, vol. 56 (1976), pp. 128–142.

[18] Voloshtchuk, V. M.: *Teoria cinetica de coagulación* (en ruso). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

Para concluir, citemos:

LUZ Y AIRE

Con la luz transparente del huyente viento,
La espuma de cerveza se sublima en los cielos claros.
Las plumas de ligereza llevando, vuelan los pájaros,
Habitantes del fluido aire en movimiento.

Con la plateada luz de la estrellada noche,
Paseando en el Malecón, sin ruido miramos al mar.
Unos vasos de ron con placer vamos a tomar.
Indiferentes de los que van veloz en coche.

Con la suave luz de la soleada neblina,
Sentados en el jardín de todos los colores,
Gozamos copas de vino entre yerbas y flores,
Contemplando nubes encima de la colina.

Con la alegre borrachera del dulce marzo
Ojeamos el aire de la revolución,
Escuchamos la luz de la liberación,
Hasta siempre en los rayos del dulce marzo.

Hisao