Cosas sencillas sobre las ecuaciones de Laplace y Poisson

José Alfredo Cañizo Rincón

20 de enero, 2005

1. Introducción

There is no general theory known concerning the solvability of all partial differential equations. Such a theory is extremely unlikely to exist, given the rich variety of physical, geometric, and probabilistic phenomena which can be modeled by PDE. Instead, research focuses on various particular partial differential equations that are important for applications within and outside of mathematics, with the hope that insight from the origins of these PDE can give clues as to their solutions.

Lawrence Evans, *Partial Differential Equations*

The notions of elliptic, parabolic, and hyperbolic formal partial differential operators are to be regarded as landmarks in a broad field rather than as infallible labels by which particular equations are to be distinguished.

Nelson Dunford, Jacob Schwartz
Linear Operators, vol. II, XIV.

The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.

David Hilbert

Finally, there is a most remarkable coincidence: *The equations for many different physical situations have exactly the same appearance*. Of course, the symbols may be different — one letter is substituted for another — but the mathematical form of the equations is the same. This means that having studied one subject, we immediately have a great deal of direct and precise knowledge of the equations of another.

Feynman, Leighton, Sands,
Lectures on Physics vol. II, cap. 12.

Una ecuación en derivadas parciales es una relación entre una función de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales (si la función es de una sola variable una relación de este tipo es una ecuación diferencial ordinaria). Resolver una ecuación de este tipo significa idealmente encontrar las funciones que la cumplen, tal vez bajo ciertas condiciones adicionales, o en caso de que no se pueda, dar la mayor información posible sobre cómo son estas funciones.

Las ecuaciones parciales son un campo tan amplio que no parece que pueda comprenderse desde un punto de vista general, así que una buena forma de estudiarlas es empezar por ejemplos concretos que contengan sugerencias sobre formas de atacar problemas más generales. Éste es uno de los motivos para estudiar las ecuaciones de Laplace y Poisson en particular: muchas de sus características se extienden a una gran variedad de problemas, y el comprenderlas en uno de los casos más simples que puede uno imaginar sirve de gran ayuda cuando uno quiere entender comportamientos parecidos de ecuaciones más complicadas.

Si estás leyendo esto probablemente tienes ya interés en las ecuaciones en derivadas parciales, así que no voy a explicar que aparecen en multitud de teorías de la física y en aplicaciones técnicas. En su lugar vamos a exponer una aplicación concreta, algo que uno está en posición de entender mejor cuando conoce las ecuaciones de Laplace y de Poisson. Explicaremos qué tienen que ver con las ecuaciones del campo gravitatorio. Por ejemplo, es muy conocido que la atracción de la Tierra es proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia a su centro, pero ¿te has preguntado alguna vez cuál es la fuerza de atracción en el *interior* de la Tierra? Por debajo de la superficie hay que tener en cuenta que la parte más cercana al centro tira hacia abajo, mientras la parte que queda por encima tira hacia arriba. ¿Cómo se compensan estas fuerzas? ¿Qué fuerza resulta de todas esas influencias? Más abajo encontrarás una bonita forma de calcularlo.

Esto pretende ser una discusión informal en la que con seguridad hay muchos errores, ya que no sé mucho sobre el tema; sin embargo, espero que en esencia el contenido sea correcto y que al menos resulte entretenido. Para cualquier sugerencia escribe a `canizo@mat.uab.cat`. Si quieres leer más sobre ecuaciones elípticas puedes consultar el libro de Gilbarg y Trudinger [4], donde se hace un desarrollo muy amplio de la teoría. En [2] y [5] hay una introducción muy interesante a las ecuaciones de Laplace y Poisson, de la que he sacado parte del contenido de estas notas. Para temas relacionados con aplicaciones en física [3] es un buen sitio donde buscar.

2. Las ecuaciones de Laplace y Poisson

Supongamos que u es una función real de N variables, definida en cierto abierto de $\mathbb{R}^N$. La ecuación

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u = 0 \tag{1}$$

se llama *ecuación de Laplace*. El operador diferencial que aparece en ella es muy común y se suele abreviar como

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}^2 u.$$

A este operador se le llama operador de Laplace o Laplaciano. Una ecuación de la que podría decirse que sigue en complejidad a la anterior es la llamada *ecuación de Poisson*,

$$\Delta u = f, \tag{2}$$

donde f es cierta función real. En la terminología usual una función *armónica* es una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un cierto abierto que cumpla (1). Una función de clase $\mathcal{C}^2$ que cumpla (2) con $f \leq 0$ se dice *superarmónica*, o *subarmónica* si lo cumple con $f \geq 0$. Hay definiciones más generales que no necesitan que la función sea de clase $\mathcal{C}^2$, pero por ahora nos bastará con éstas. Existen también ligeras diferencias en la terminología: a veces se llama ecuación de Poisson a $-\Delta u = f$, de forma que subarmónica significa $f \leq 0$ en este caso. Esto son sólo diferencias de notación, ya que el concepto de función subarmónica o superarmónica es el mismo; el uso de sub- o super- no está motivado por el signo de f, sino por la siguiente propiedad fundamental que veremos luego: si una función armónica y una subarmónica coinciden en la frontera de un dominio acotado, entonces la función subarmónica es más pequeña que la armónica en todo el dominio. La propiedad análoga se cumple para las funciones superarmónicas.

Las preguntas son: ¿bajo qué condiciones tienen solución estas ecuaciones?, ¿cómo son estas soluciones?, ¿se pueden calcular en algún caso?

Antes de contestar en parte a estas preguntas veamos algunos contextos donde aparece esta ecuación en física de forma que uno pueda hacerse una idea previa de su significado.

3. Algunas teorías de la física donde aparecen estas ecuaciones

3.1. La ecuación del calor

¿Cómo cambia la temperatura de un objeto? La temperatura es una forma de energía, y en ciertas condiciones comunes el cambio más importante de un objeto es su transmisión en forma de calor (cuando no ocurren otras cosas, como por ejemplo reacciones químicas, en el objeto del que se trate). Supongamos por ejemplo que hablamos del aire dentro de una habitación. Llamemos $T(x,t)$ a la temperatura en el punto x en el momento t, medida en grados Kelvin, y $q(x,t)$ al vector que da el flujo de calor en el punto x, es decir, el vector que apunta en el sentido en que se transmite el calor y que tiene una longitud proporcional a la rapidez con la que fluye dicho calor. Entonces el aumento de temperatura de un dominio acotado Ω de la habitación será la cantidad de calor que entra en ese trozo (puede también salir calor en lugar de entrar, y en ese caso el "aumento" tiene signo negativo y se interpreta como una disminución):

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega T\,dx = C\int_{\partial\Omega} \langle q, N\rangle \; dS,$$

donde N representa el normal interior a la frontera de Ω y C es una constante que necesitamos incluir porque la temperatura no es exactamente la energía, sino algo proporcional — la constante de proporcionalidad se llama constante de Boltzmann; por esto usamos la escala Kelvin —. A partir de ahora escribiremos C para denotar una constante de la que no nos preocuparemos, posiblemente distinta de una ecuación a otra, pero que no influye en la estructura matemática del argumento. Por argumentos físicos es razonable pensar que q es proporcional a la variación de temperatura y va en el sentido en que ésta disminuye:

$$q \propto -\nabla T,$$

donde ∇T es el gradiente de T en la variable x (esto es, $\nabla T := (\partial_{x_1}T, \partial_{x_2}T, \partial_{x_3}T)$). De hecho, esto se parece a nuestra idea intuitiva de lo que debería pasar: el calor va de la parte más caliente a la parte más fría, que es la dirección contraria a la que indica ∇T, y va más rápido cuanto más pronunciado es el cambio de temperatura entre un punto y los de alrededor. Entonces queda

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega T = -C\int_{\partial\Omega} \langle \nabla T, N\rangle\,.$$

Usando el teorema de la divergencia:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega T = C\int_\Omega \partial_t T = C\int_\Omega \operatorname{div}\nabla T = \int_\Omega \Delta T.$$

Hemos usado que el laplaciano de una función es la divergencia de su gradiente. Como el dominio Ω era uno cualquiera es fácil ver que la última igualdad implica que las funciones $\partial_t T$ y ΔT deben ser iguales *en todo punto*:

$$\partial_t T = C\,\Delta T.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de *ecuación del calor*. Si lo que nos preguntamos es si hay alguna distribución de temperatura que no cambie en el tiempo, *estacionaria*, entonces

$$\Delta T = 0,$$

de forma que una distribución estacionaria de temperatura cumple la ecuación de Laplace. Si además en la situación de la que se trate hay fuentes de calor (como un radiador en el centro de la habitación), se puede ampliar el razonamiento anterior y ver que la ecuación correspondiente a un estado estacionario es

$$\Delta T = s,$$

donde s es la densidad de energía calorífica que emite la fuente por unidad de tiempo (desde luego si s es negativa la “fuente” es en realidad algo que absorbe calor).

3.2. Láminas elásticas

Una lámina elástica (por ejemplo, una superficie de goma o una película de jabón) tiende a estar en la posición en la que su superficie sea lo menor posible. Si sus bordes están fijos, por ejemplo en un alambre, la lámina adoptará la forma de lo que se conoce como una superficie minimal. Si una superficie así está dada por el grafo de u en un cierto dominio se sabe que u cumple la ecuación

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

Esta ecuación resulta demasiado complicada; para aplicaciones prácticas en las que $|\nabla u|$ es muy pequeño (si estudiamos la superficie en una zona muy pequeña, si u es “casi” una función constante salvo desviaciones pequeñas o situaciones parecidas), una buena aproximación es

$$\Delta u = 0,$$

la ecuación de Laplace. En física elemental normalmente se hace esta aproximación (aunque se llegue a ella por métodos distintos) y se dice, por ejemplo, que la forma que toma una lámina elástica (que suponemos inicialmente en posición horizontal) cuando está sometida a una fuerza (tal vez dependiente de la posición) en la dirección del eje vertical se parece a la solución de la ecuación

$$\Delta u = C\, f,$$

donde C es una constante (la inversa de la tensión de la lámina) y consideramos la fuerza positiva si va hacia abajo, negativa si va hacia arriba. Esta ecuación da buenos resultados en muchos casos prácticos. Para más detalles sobre esto, ver [3, vol. 2, cap. 12].

3.3. La gravedad

Describamos otro contexto distinto donde aparece la ecuación de Laplace. La ley de la gravedad de Newton dice que dos masas M y m separadas por una distancia r se atraen en la dirección de la recta que las une con una fuerza

$$|F| = G\frac{Mm}{r^2},$$

donde G es la constante de gravitación universal expresada en unidades adecuadas. Por supuesto, la fuerza F es un vector, aunque cuando se escribe la ecuación anterior frecuentemente se incluye sólo su magnitud, como hemos hecho nosotros. Esto puede decirse de otra forma: si imaginamos que un cuerpo de masa m, que suponemos concentrada (idealmente) en un punto y, crea un campo gravitatorio dado por

$$E(x) = Gm\frac{y-x}{|y-x|^3}, \tag{3}$$

entonces podemos expresar la ley diciendo que la fuerza (ahora vectorial) sobre otro cuerpo cualquiera de masa M situado en x es $ME(x)$ (obsérvese que la magnitud, el módulo, de E es la fuerza que escribimos al principio). De la misma forma podemos calcular el campo que crean dos partículas de masas m_1 y m_2, situadas en puntos y_1 e y_2, respectivamente:

$$E(x) = Gm_1\frac{y_1-x}{|y_1-x|^3} + Gm_2\frac{y_2-x}{|y_2-x|^3}.$$

Si lo que tenemos es una gran cantidad de partículas cuya distribución podemos expresar con una función de densidad $m(y)$ (que da la densidad de masa en cada punto y) podemos generalizar esto para dar el campo que crea esta distribución de masa:

$$E(x) = G\int \frac{y-x}{|y-x|^3}m(y)\,dy. \tag{4}$$

Una justificación de esto es que esta integral y la suma anterior verdaderamente se parecen mucho si hay gran cantidad de partículas, de forma que el resultado es suficientemente aproximado para la mayoría de situaciones prácticas.

Al estudiar el campo E creado por una distribución de masa es útil hablar del *potencial* que crea esta masa. El potencial no es más que una función real V de forma que $-\nabla V = E$ (y que está determinada salvo la suma de una constante). Por ejemplo, para el campo creado por una partícula de masa m situada en el punto y la función

$$V(x) = -Gm\frac{1}{|y-x|}$$

sirve como potencial (podéis ver que $-\nabla V$ es el campo dado en la ecuación (3)). De la misma forma que antes, el potencial creado por una distribución de masa $m(y)$ es

$$V(x) = -G\int \frac{1}{|y-x|}m(y)\,dy. \tag{5}$$

Puede comprobarse derivando bajo la integral que $-\nabla V = E$ (con E dado por (4)).

¿Dónde está aquí la ecuación de Laplace? En realidad, aún no podemos verla claramente. Lo que ocurre es que

$$\Delta V = -4\pi Gm, \tag{6}$$

de forma que el potencial cumple la ecuación de Poisson en la que el segundo término es esencialmente menos la densidad de masa (salvo una constante). Esto no puede probarse derivando bajo la integral en (5), ya que la segunda derivada que obtenemos *no es integrable*, así que la regla de derivación bajo la integral no es válida (aplicándola sin más comprobaréis que se obtiene un resultado incorrecto). Sin embargo, después probaremos que (6) es cierta.

4. Algunas propiedades muy conocidas

Para estudiar una ecuación uno de los primeros pasos suele ser preguntarse qué soluciones particulares sencillas conoce uno. En el caso de las ecuaciones lineales (como la de Laplace) esto es especialmente útil porque inmediatamente después uno puede conseguir nuevas soluciones haciendo combinaciones lineales de las anteriores. Hagamos esto para la ecuación de Laplace. ¿Qué soluciones fáciles puede uno encontrar de $\Delta u = 0$? (aquí u es una función real de N variables). Por ejemplo,

- las funciones afines. En particular, las constantes.
- las funciones de la forma

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2 \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{N} a_i = 0.$$

  En el caso de dos variables, $x_1^2 - x_2^2$ es una función cuya gráfica tiene forma de silla de montar.
- *las partes real e imaginaria de cualquier función holomorfa* (lo cual se ve derivando una vez las ecuaciones de Cauchy-Riemann que cumplen estas funciones).

En la búsqueda de soluciones particulares puede ayudar el hecho de que la ecuación tenga ciertas simetrías. En este caso puede comprobarse que la ecuación es la misma si la componemos con un giro en $\mathbb{R}^N$, es decir: si u es una solución, entonces una rotación suya es también una solución. Esto sugiere buscar soluciones que sean radialmente simétricas. Si hacemos esto encontraremos que

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{|x|^{N-2}} & \text{si } N > 2 \\ \log|x| & \text{si } N = 2 \end{array}$$

tiene laplaciano cero (notemos que estas funciones son derivables en todo punto *salvo en el origen*). Para simplificar las constantes en los cálculos que hagamos, y para seguir la nomenclatura que suele usarse comúnmente, llamaremos *solución* *fundamental* del laplaciano a la siguiente función, que no es más que una constante por la anterior[1]:

$$\Gamma(x) := \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} \qquad \text{si } N > 2$$
$$\Gamma(x) := -\frac{1}{2\pi} \log |x| \qquad \text{si } N = 2,$$

donde la constante ω_N es el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^N$. Como la ecuación de Laplace es también invariante por traslaciones (si algo es solución, cualquier traslación suya lo es) ocurre que las funciones $u(x) = \Gamma(x-y)$ (para $y \in \mathbb{R}^N$ fijo) son también soluciones de $\Delta u = 0$.

Dispuestos a sumar soluciones para hallar otras soluciones, uno puede pensar que *integrar* muchas soluciones puede dar otra solución. Probemos con

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y)\, dy,$$

para cierta función f que supondremos por ahora de soporte compacto y tan regular como necesitemos para asegurarnos de que la integral anterior tiene sentido. Notemos que esto se parece mucho al potencial que escribimos en (5). Ahora sí vamos a calcular su laplaciano, para ver si es solución de algo, ya que la hemos obtenido "sumando" muchas soluciones de $\Delta u = 0$. Repitamos que *no* podemos derivar directamente bajo la integral para calcular el laplaciano de u ya que, calculado directamente, el laplaciano de la función bajo la integral no es integrable. De hecho, tampoco podemos aplicar la regla usual de derivación bajo la integral para derivar una vez, porque no se cumplen las condiciones usuales (aunque en este caso el resultado que se obtiene sí es correcto). En su lugar, hagamos un cambio de variable lineal y escribamos la integral anterior como

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y) f(x-y)\, dy.$$

Ahora sí se puede derivar bajo la integral si f es suficientemente regular. Obtenemos que

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y) \Delta f(x-y)\, dy,$$

lo cual dice que u es al menos dos veces derivable si f lo es. Como todo el problema al derivar viene del "pico" de Γ, y dado que queremos usar de alguna forma que el laplaciano de Γ es cero en cualquier dominio que no incluya al origen (es decir,

[1] A veces se usa el término "solución fundamental" para la función con signo contrario a la dada aquí. El motivo es que, en sentido de distribuciones, el laplaciano de la Γ definida arriba es menos la delta de Dirac y uno preferiría que fuera la delta. La definición que usamos en estas notas es también común (se usa por ejemplo en el libro de Evans [2]) y no causa confusión si se recuerda esto.

que Γ es solución de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$), vamos a partir la integral anterior en dos trozos: la bola B_ϵ de radio $\epsilon > 0$ centrada en el cero y el resto:

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,dy \\ &= \int_{B_\epsilon} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,dy =: I_\epsilon + J_\epsilon.\end{aligned}$$

Es fácil ver que la integral $I_\epsilon \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, ya que la función dentro de la integral es integrable (Γ es integrable y Δf acotado). Como nuestra intención final es precisamente hacer tender ϵ a cero, no nos preocuparemos de ella. En cuanto a J_ϵ, podemos aplicar la segunda fórmula de Green para escribirla como

$$\begin{aligned}J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon} \Delta\Gamma(y) f(x-y)\,dy \\ &\quad - \int_{\partial B_\epsilon} \langle \nabla\Gamma(y), N(y)\rangle\, f(x-y)\,dS(y) - \int_{\partial B_\epsilon} \langle \nabla f(x-y), N(y)\rangle\, \Gamma(y)\,dS(y) \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \langle \nabla\Gamma(y), N(y)\rangle\, f(x-y)\,dS(y) - \int_{\partial B_\epsilon} \langle \nabla f(x-y), N(y)\rangle\, \Gamma(y)\,dS(y),\end{aligned}$$

ya que $\Delta\Gamma = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon$. Aquí N representa el normal interior a B_ϵ (el exterior a $\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon$, que hemos usado para aplicar la fórmula de Green). Es fácil ver que la última de estas dos integrales también tiende a cero con ϵ, ya que $\langle \nabla f(x-y), N(y)\rangle$ está acotado y $\Gamma(y) \propto \epsilon^{-N+2}$ sobre ∂B_ϵ (en el caso de $N = 2$, $\Gamma(y) \propto \log(\epsilon)$), lo cual tiende a cero al integrar sobre la esfera de dimensión $N-1$, que tiene área proporcional a ϵ^{N-1}. La interesante es la primera de ellas. Observemos que

$$\begin{aligned}N(y) &= -\frac{y}{|y|} \\ \nabla\Gamma(y) &= -\frac{1}{N\omega_N}\frac{y}{|y|^N} \\ \langle \nabla\Gamma(y), N(y)\rangle &= \frac{1}{N\omega_N}\frac{1}{|y|^{N-1}},\end{aligned}$$

luego sobre la esfera ∂B_ϵ ocurre que

$$\langle \nabla\Gamma(y), N(y)\rangle = \frac{1}{N\omega_N}\frac{1}{\epsilon^{N-1}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}&- \int_{\partial B_\epsilon} \langle \nabla\Gamma(y), N(y)\rangle\, f(x-y)\,dS(y) \\ &\qquad = -\frac{1}{N\omega_N}\frac{1}{\epsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\epsilon} f(x-y)\,dS(y) \\ &\qquad = -\frac{1}{N\omega_N}\frac{1}{\epsilon^{N-1}} \int_{\partial B(x,\epsilon)} f(y)\,dS(y) \to -f(x) \quad \text{cuando } \epsilon \to 0,\end{aligned}$$

ya que lo último que aparece arriba es precisamente *la media* de f sobre la esfera de radio ϵ (notemos que $\epsilon^{N-1}N\omega_N$ es la superficie de la esfera de radio ϵ). Esto, finalmente, demuestra que

$$\Delta u = -f.$$

Lo que hemos demostrado es lo siguiente:

Teorema. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ cuya frontera es una hipersuperficie de clase $\mathcal{C}^1$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2(\Omega)$ e integrable en Ω. Entonces, la función*

$$u(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

es dos veces derivable en Ω y en $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ y

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -f(x) \qquad \forall\, x \in \Omega \\ \Delta u(x) &= 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

En realidad el razonamiento anterior estaba hecho para f definida en $\mathbb{R}^N$, de soporte compacto y dos veces diferenciable, aunque puede extenderse con facilidad para probar el teorema. Si f está definida en Ω y es dos veces diferenciable, extendámosla por cero a todo $\mathbb{R}^N$. Si x es un punto de Ω podemos escribir

$$f = g + h,$$

donde g es diferenciable de soporte compacto y h es integrable y vale cero en un entorno de x (por ejemplo, si ϕ es una función meseta que vale uno en un entorno de x y cero fuera de otro entorno de x contenido en Ω, podemos tomar $f = \phi f + (1-\phi)f$). Entonces

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)g(y)\,dy + \int_\Omega \Gamma(x-y)h(y)\,dy.$$

La primera función está en las condiciones del razonamiento anterior, ya que g es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^N$; el laplaciano de la segunda función es cero, ya que el "pico" de Γ está fuera del dominio de integración y puede derivarse directamente bajo la integral, así que se obtiene el resultado del teorema. Una idea importante bajo este razonamiento es que *la regularidad local de u en un punto sólo depende de la regularidad local de f en ese punto.*

Ahora vemos que si m es una distribución de masa en $\mathbb{R}^3$ —una función positiva e integrable, en términos matemáticos— y V es el potencial gravitatorio dado por (5), entonces

$$\begin{gathered} V = 4\pi G \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)m(y)\,dy \\ \Delta V = -4\pi G m, \end{gathered}$$

que era la ecuación que escribimos en (6). Hemos probado que esto es cierto en los puntos donde m es derivable.

4.1. Las desigualdades de la media

Veamos una propiedad curiosa de las soluciones de la ecuación $\Delta u = f$, con $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^N)$ (esto denota el conjunto de funciones de soporte compacto en $\mathbb{R}^N$ que tienen dos derivadas continuas, aunque, como antes, los resultados serán válidos para funciones f más generales). Fijado $x \in \mathbb{R}^N$, derivemos la función

$$\rho(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, ds(y)$$

con respecto a r:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\rho(r) &= \frac{d}{dr}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) \\
&= \frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\int_{\partial B(0,1)} u(x+ry)\, dS(y)\right) \\
&= (N-1)r^{N-2}\int_{\partial B(0,1)} u(x+ry)\, dS(y) + r^{N-1}\int_{\partial B(0,1)} \frac{d}{dr}u(x+ry)\, dS(y) \\
&= (N-1)\frac{1}{r}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) + r^{N-1}\int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(x+ry), y\rangle \, dS(y) \\
&= (N-1)\frac{1}{r}\rho(r) + \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla u(y), N(y)\rangle \, dS(y) \\
&= (N-1)\frac{1}{r}\rho(r) + \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy \\
&= (N-1)\frac{1}{r}\rho(r) + \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.
\end{aligned}$$

En caso de que u sea solución de la ecuación de Laplace (es decir, si $f \equiv 0$),

$$\frac{d}{dr}\rho(r) = (N-1)\frac{1}{r}\rho(r),$$

luego $\rho(r) = Cr^{N-1}$ para cierta constante C. Como cuando $r \to 0$ ocurre que $r^{1-N}\rho(r) \to N\omega_N u(x)$ (Nw_N es la superficie de la esfera unidad en $\mathbb{R}^N$), la constante C debe ser $u(x)N\omega_N$. Luego

$$\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = u(x).$$

El denominador de la fracción de la izquierda no es más que la superficie de $B(x,r)$, así que podemos escribir

$$\text{valor medio de } u \text{ en } \partial B(x,r) \; = u(x).$$

Ésta es la conocida propiedad de la media de las funciones armónicas. De la misma forma, del cálculo anterior podemos deducir una desigualdad en la ecuación diferencial en los casos en que $f \geq 0$ o $f \leq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\rho(r) &\geq (N-1)\frac{1}{r}\rho(r) \qquad \text{si } f \geq 0 \\ \frac{d}{dr}\rho(r) &\leq (N-1)\frac{1}{r}\rho(r) \qquad \text{si } f \leq 0. \end{aligned}$$

En general cuando uno tiene una desigualdad de este tipo ocurre que la solución es también mayor o menor, según corresponda, que la solución exacta si hubiera igualdad (un caso muy conocido de esto es el lema de Gronwall). Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) &\geq u(x) \qquad \text{si } \Delta u \geq 0 \ (u \text{ subarmónica}) \\ \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) &\leq u(x) \qquad \text{si } \Delta u \leq 0 \ (u \text{ superarmónica}). \end{aligned}$$

Éstas son las *desigualdades de la media* para funciones subarmónicas y superarmónicas, respectivamente. De hecho puede demostrarse que estas desigualdades *caracterizan* a este tipo de funciones, de forma que suele ampliarse la definición de (sub, super)armónica a funciones que cumplan la correspondiente (des)igualdad anterior (y que no necesariamente sean dos veces derivables).

Integrando las (des)igualdades anteriores para r entre 0 y $R > 0$ puede verse que la media de una función (armónica, subarmónica, superarmónica) en una bola alrededor de un punto (no en la esfera, sino en la *bola*) es también igual ($\geq$, $\leq$) que el valor de la función en el punto. Esto es también muy razonable, ya que si la media *en todas las esferas* en torno a un punto es la misma no cuesta imaginar que la media *en la bola* también debe ser la misma (mayor o igual, menor o igual).

4.2. El campo creado por la Tierra en el exterior

Una consecuencia de esto es que ahora sabemos calcular el campo que crea la Tierra en los puntos exteriores. ¿Cómo? La densidad de masa de la Tierra puede aproximarse como

$$m(y) := \begin{cases} \rho & \text{si } |y| \leq R \\ 0 & \text{si } |y| > R \end{cases}$$

Aquí, R es el radio de la Tierra (en metros, para ser precisos) y ρ es su densidad de masa (en unidades adecuadas, pongamos kilos por metro cúbico) y que suponemos siempre constante para simplificar (cosa que no es cierta; por ejemplo, se piensa que el núcleo es mucho más denso). En (5) dedujimos que el potencial que crea esta masa es

$$\begin{aligned} V(x) &= -G \int \frac{1}{|y-x|} m(y)\, dy \\ &= -G\rho \int_{B(0,R)} \frac{1}{|y-x|}\, dy \\ &= -G\rho \int_{B(-x,R)} \frac{1}{|y|}\, dy. \end{aligned}$$

Un punto x está fuera de la Tierra si $|x| > R$, luego para estos puntos $B(-x, R)$ *no incluye al origen*. Por tanto la última integral que hemos escrito es la integral en una bola de una función *armónica en toda la bola* (si la bola incluye al origen entonces no podemos decir esto). La igualdad de la media dice que esa integral es el valor de la función en el centro de la bola (el punto $-x$) multiplicado por el volumen de la bola (que es el volumen de la Tierra, V_T). Por tanto

$$V(x) = -G\rho \int_{B(-x,R)} \frac{1}{|y|}\, dy = -G\rho V_T \frac{1}{|x|}.$$

Para calcular el campo no hay más que hacer el gradiente:

$$E(x) = -\nabla V(x) = -G\rho V_T \frac{x}{|x|^3}, \tag{7}$$

así que la fuerza sobre una masa M situada en x va dirigida hacia el centro de la Tierra (aquí es el origen) y tiene magnitud

$$F = M\,|E| = MG\rho V_T \frac{1}{|x|^2},$$

lo cual está de acuerdo con lo que esperábamos. De hecho, ya que ρV_T es la masa de la Tierra M_T,

$$F = G \frac{M\, M_T}{|x|^2},$$

que es la ley de Newton, pero ahora teniendo en cuenta la influencia de *toda la Tierra*, sin suponer que toda la masa está en su centro. De hecho el resultado es el mismo y por eso se puede simplificar mucho al enseñarlo. Y este resultado va más lejos, ya que se obtiene la misma ley para una distribución de masa *radialmente simétrica*, sin que la densidad sea necesariamente constante (no es difícil de probar), así que nuestro resultado sigue siendo cierto incluso si queremos tener en cuenta que el núcleo de la Tierra es más denso que su superficie.

Para calcular el campo dentro de la Tierra nos vendrá bien otra propiedad muy conocida de la ecuación de Laplace: el principio del máximo.

4.3. El principio del máximo

El principio débil del máximo dice que si una función armónica es $\mathcal{C}^2$ en un dominio acotado Ω y continua en $\overline{\Omega}$, entonces su máximo absoluto se alcanza en la frontera. El principio fuerte del máximo dice que de hecho el máximo no se alcanza en ningún punto del interior a menos que la función sea constante. Por supuesto, todos los resultados sobre máximos tienen su correspondiente resultado sobre mínimos, porque si u es armónica $-u$ también lo es y los máximos de una son mínimos de la otra, así que sólo hablaremos del máximo. Si tenemos en mente que una función armónica representa una distribución de temperatura que no cambia con el tiempo esto no es difícil de ver intuitivamente: si hay un punto donde la temperatura es mayor que en los puntos de alrededor la temperatura cambiará, porque el calor va de la parte más caliente a la más fría, así que ese punto se enfriará. Si pensamos en la ecuación de Laplace no es difícil ver también un motivo por el que esto debería pasar: en dos dimensiones, por ejemplo, *todos los puntos de una función armónica son puntos de silla*, así que no pueden ser máximos (ni mínimos, claro). Este razonamiento puede precisarse como haremos a continuación.

A partir de ahora Ω será un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^N$ (a menos que se diga lo contrario expresamente) y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$ en Ω y continua en $\overline{\Omega}$.

Supongamos que $\Delta u > 0$ en Ω. Entonces sabemos que *u no puede tener máximos relativos dentro de Ω*, porque en un máximo relativo el Hessiano de u es semidefinido negativo y por tanto su traza (el laplaciano de u) es ≤ 0. Si el máximo no está dentro estará en la frontera, así que sabemos que

$$\Delta u > 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Si ahora suponemos que u es armónica ($\Delta u = 0$) no podemos hacer el mismo razonamiento, pero podemos aproximar u por funciones que sí tiene laplaciano mayor que cero. Por ejemplo, sumando $\epsilon |x|^2$:

$$\Delta(u(x) + \epsilon |x|^2) > 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}}\{u(x) + \epsilon |x|^2\} = \max_{\partial\Omega}\{u(x) + \epsilon |x|^2\}.$$

En la última conclusión podemos pasar al límite cuando $\epsilon \to 0$ y deducir que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

que es el principio débil del máximo. Con el mismo razonamiento se ve que sigue siendo cierto para funciones subarmónicas ($\Delta u \geq 0$).

El principio fuerte del máximo puede probarse por ejemplo usando las (des)igualdades de la media. El resultado es el siguiente:

Principio fuerte del máximo para funciones armónicas. *Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^N$ y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función armónica de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω y continua en $\overline{\Omega}$.*

Si u alcanza su máximo absoluto en algún punto de Ω entonces u es constante en Ω.

Demostración. Llamemos M al máximo absoluto de u en $\overline{\Omega}$ y $A := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$. Si suponemos que el teorema no se cumple, entonces este conjunto es no vacío, y como u es continua es también cerrado. La idea es que en cualquier punto x donde $u(x) = M$ ocurre que los puntos cercanos también $u = M$, *porque la media de u en una bola alrededor de x es M y u no puede ser mayor que M*. Más precisamente, si $u(x) = M$ y tomamos $B(x, r) \subseteq \Omega$,

$$M = u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy \leq \frac{1}{|B(x,r)|} M \int_{B(x,r)} dy = M.$$

Por tanto la integral de arriba es *exactamente* M; como u es continua no puede haber ningún punto de la bola donde $u < M$, así que $B(x, r) \subseteq A$ y A es un conjunto abierto y cerrado, luego es todo Ω (ya que habíamos supuesto que Ω es conexo), luego $u \equiv M$ en Ω. □

Cualquiera de los principios anteriores implica que *las soluciones de las ecuaciones de Laplace o Poisson en un dominio conexo y acotado con condiciones de frontera continuas, si existen, son únicas.* Es fácil ver esto: supongamos que tenemos dos soluciones u_1, u_2 de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ y continuas en $\overline{\Omega}$ de la ecuación

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \qquad \text{en } \Omega \\ u &= \phi \qquad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

para cierta función f y cierta función ϕ continua en $\partial\Omega$. Entonces $u_1 - u_2$ es una función armónica en Ω, continua hasta la frontera, que vale cero en $\partial\Omega$. Como el máximo y el mínimo de $u_1 - u_2$ se alcanzan en la frontera, ambos son cero, luego $u_1 - u_2 \equiv 0$ en $\overline{\Omega}$.

Además, prácticamente el mismo razonamiento de antes prueba que el principio fuerte del máximo (no del mínimo) es cierto para funciones subarmónicas (no necesariamente armónicas), y que el principio fuerte del mínimo vale para funciones superarmónicas. Una consecuencia fácil de esto es que si en las mismas condiciones anteriores una función armónica u y una subarmónica v coinciden en $\partial\Omega$, entonces $v \leq u$ en Ω. Éste es el motivo del término "subarmónica"; otro tanto ocurre para las funciones superarmónicas.

4.4. El campo en el interior de la Tierra

Pensemos en cómo calcular el potencial en un punto del interior de la Tierra. Como antes, la integral adecuada es

$$V(x) = -G\rho \int_{B(-x,R)} \frac{1}{|y|}\, dy \tag{8}$$

para $|x| \leq R$. Antes dedujimos que

$$\Delta V(x) = 4\pi G m(x) = 4\pi G\rho,$$

una constante. Algo que no es difícil de ver es que V tal y como está definida en la ecuación (8) es *continua* en $\mathbb{R}^3$, así que sabemos cuánto debe valer en puntos de la superficie de la Tierra ($|x| = R$) porque lo calculamos antes. En resumen, sabemos que

$$\Delta V(x) = 4\pi G\rho \qquad (|x| < R)$$
$$V(x) = M_T \frac{1}{R} \qquad (|x| = R).$$

El laplaciano de V es una constante. Conocemos funciones que cumplen esto: las funciones cuadráticas. ¿Podemos encontrar alguna que tenga el valor adecuado cuando $|x| = R$? Sí, sumándole después la constante correcta:

$$V(x) = \frac{2}{3}\pi G\rho\,|x|^2 - \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 + M_T \frac{1}{R}.$$

Además, sabemos por el principio del máximo que *ésta es la única solución posible, así que éste tiene que ser el valor de la integral.* Por tanto, V *es* la expresión que acabamos de escribir. Como antes, de esto se obtiene el campo gravitatorio dentro de la Tierra:

$$E(x) = -\nabla V(x) = -\frac{4}{3}\pi G\rho x = -\frac{4}{3}\pi R^3 G\rho \frac{x}{R^3} = -GV_T\rho \frac{x}{R^3} = -GM_T \frac{x}{R^3}.$$

Observad que este campo coincide con el que calculamos en (7) cuando $|x| = R$. Vemos entonces que la magnitud de la fuerza dentro de la Tierra decrece de forma lineal:

$$F = |E| = GM_T \frac{r}{R^3},$$

donde r es la distancia al centro de la Tierra. Un aspecto curioso de esto es que *no hemos necesitado calcular explícitamente la integral que da el potencial*, o el campo, sino que el conocimiento de sus propiedades nos dice cómo debe ser.

5. Sobre este texto

Para comentarios escribe a José Alfredo Cañizo `<canizo@mat.uab.cat>`. Puedes encontrar la última versión de este documento en

`http://www.mat.uab.cat/~canizo/tex/`

Estas notas han sido escritas para un seminario organizado por Magdalena Rodríguez, Isabel Fernández y otros estudiantes del departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, que junto con Gabriel Navarro y Óscar Sánchez han influido en el contenido con sus preguntas y observaciones. Muchos errores han sido corregidos gracias a comentarios de Juanjo Nieto, que aparte de varias sugerencias matemáticas ha señalado que en español no se pone nunca punto

después de las interrogaciones, cosa que contribuyó notablemente a la mejora del aspecto visual de estos apuntes; y de María José Cáceres, que con comentarios sobre las matemáticas, la forma y el autor ha animado al último, hecho más claras las primeras y más española la del medio.

5.1. Copia y distribución

Referencias

[1] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz, *Linear operators*, John Wiley & Sons Inc., Nueva York, 1963

[2] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, AMS, 1998

[3] Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, 1989

[4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1977

[5] Fritz John, *Partial Differential Equations*, third edition, Springer-Verlag, 1980