Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Carathéodory

José Alfredo Cañizo Rincón

7 de julio, 2004

1. Introducción

En estos apuntes se exponen y demuestran resultados básicos sobre existencia, unicidad y regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en condiciones un poco más débiles que las clásicas, de forma que los resultados clásicos se deducen de éstos. No es una introducción adecuada para aquél que no ha estudiado antes ecuaciones ordinarias porque el hecho de tratar soluciones débiles complica algunos conceptos y hace más sutiles ciertas demostraciones. Sin embargo, el que conozca la teoría común de soluciones clásicas notará que la mayor parte del desarrollo puede hacerse exactamente igual, con la ventaja de que las soluciones de este tipo son útiles al trabajar, por ejemplo, en problemas de ecuaciones diferenciales parciales, donde la extensión del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria es fundamental para atacar los problemas más rudimentarios; de hecho, ésta fue la motivación inicial de estas notas. Este trabajo es tal vez apropiado para aquél que quiere estudiar ecuaciones ordinarias con más profundidad o necesita resultados más precisos. He intentado también que los enunciados sean completos de forma que pueda ser útil como referencia.

A pesar de no ser una introducción, el desarrollo es autocontenido y sólo requiere conocimientos previos de análisis real e integración de Lebesgue.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias formalizan las situaciones en las que se conoce la relación entre una cierta cantidad variable y su velocidad de cambio. No es sorprendente entonces que algo tan fundamental aparezca en una gran variedad de contextos: los ejemplos usuales incluyen ecuaciones que reflejan la evolución de una población o el movimiento de un cuerpo que sigue las leyes de Newton. El presente trabajo es teórico, y uno de los méritos de la conocida teoría de existencia, unicidad y comportamiento que recoge es que asienta las bases para responder a las preguntas más fundamentales que aparecen en el estudio de estas ecuaciones: ¿podemos hablar de algo a lo que podamos llamar una solución? ¿qué características generales tiene esa solución? ¿qué tipos de aproximaciones son razonables al atacar un problema?

2. Definiciones y propiedades generales

2.1. Definición de solución

Definición 2.1 (Solución)**.** Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Una *solución en el sentido de Carathéodory* (o simplemente solución) de

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

es una función localmente absolutamente continua $x : I \to \mathbb{R}^N$ definida en cierto intervalo real no trivial I, tal que $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ y $x'(t) = f(t, x(t))$ para casi todo $t \in I$.

Una *solución en el sentido de Carathéodory* de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

es una solución x de (1) tal que t_0 está en su dominio de definición y que cumple $x(t_0) = x_0$.

Hay un orden natural entre las soluciones de (2): una solución es mayor que otra si es una extensión suya. Normalmente estamos interesados en soluciones en un intervalo tan grande como sea posible, a los que llamamos intervalos maximales:

Definición 2.2. Sea I un intervalo real no trivial, $x : I \to \mathbb{R}^N$ una solución de (2). Decimos que I es un intervalo maximal de definición de x cuando x no puede extenderse a una solución definida en un intervalo mayor.

Una observación básica es la siguiente, que es cierta en las condiciones más generales posibles:

Proposición 2.3. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un conjunto cualquiera, $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Cualquier solución de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

puede extenderse a una solución definida en un intervalo maximal.

La demostración es sencilla: con el orden natural del que hablábamos, el conjunto de todas las soluciones de (2) que extienden a la solución dada es un conjunto inductivo y, usando el lema de Zorn, tiene un elemento maximal, que es una solución definida en un intervalo maximal en el sentido anterior. Sin embargo, los detalles de la prueba de que dicho elemento maximal es efectivamente una solución son un poco más sutiles que en el caso de las soluciones clásicas, donde resulta evidente, y por esto los incluyo aquí:

Demostración. Con el orden natural que hay entre las soluciones de (2), el conjunto de todas las que extienden a la solución dada es un conjunto inductivo y, usando el lema de Zorn, tiene un elemento maximal, que es una solución definida en un intervalo maximal.

Veamos que efectivamente es un conjunto inductivo. Sea $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$ un conjunto de soluciones totalmente ordenado en el sentido anterior (donde el conjunto de índices Γ no tiene por qué ser numerable), con cada x_i definida en un intervalo I_i. Definamos el conjunto I como la unión de todos ellos:

$$I := \bigcup_{i\in\Gamma} I_i$$

Probemos algo que resultará útil: dado cualquier compacto $J \subseteq I$, existe un cierto intervalo de los I_i tal que $J \subseteq I_i$. Esto es claro, ya que si $a := \text{mín}(J), b := \text{máx}(J)$, entonces a está en un cierto I_i y b está en un cierto I_j. Como la familia de intervalos es totalmente ordenada, uno de ellos (pongamos I_i) contiene al otro (I_j), así que $a, b \in I_j$, luego $J \subseteq [a,b] \subseteq I_j$.

En particular, esto prueba que I es un intervalo (si contiene a dos puntos extremos, contiene a todos los intermedios).

Definimos $x : I \to \mathbb{R}^N$ de la siguiente forma: dado $t \in I$, cualquier x_i que esté definida en t (y hay alguna que lo está) toma el mismo valor en t, ya que las soluciones se extienden unas a otras; podemos entonces definir $x(t) := x_i(t)$ para cualquier $i \in \Gamma$ tal que $t \in I_i$, y no hay ambigüedad en esto. Ocurre que:

- $(t, x(t)) \in D \; \forall \; t \in I$ por definición, ya que x siempre coincide con algún x_i, que es solución.
- x es absolutamente continua en compactos, ya que en cualquier subintervalo compacto coincide con un cierto x_i por la observación anterior.
- x cumple la ecuación en casi todo punto de I también porque coincide en compactos con un cierto x_i.

Esto prueba que x es solución en I, luego el conjunto de soluciones que extienden a una dada es inductivo y hemos terminado. □

Observación 2.4. Esta demostración usa el axioma de elección (en la forma del Lema de Zorn), aunque bajo condiciones más restrictivas puede evitarse (ver la demostración del Teorema 3.1 en [5], pág. 13).

Obsérvese que existe una solución en un intervalo maximal que extiende a una dada, pero no tiene por qué ser única, y si existen varias no tienen por qué estar definidas en el mismo intervalo.

Definición 2.5 (Solución general)**.** Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, $f : D \to \mathbb{R}^N$.

Una *solución general* de $x' = f(t,x)$ es una función x definida en un subconjunto E de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ tal que para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ tal que la función $x(\cdot, t_0, x_0)$

está definida en algún punto, $x(\cdot, t_0, x_0)$ es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Es común que aparezcan también ecuaciones dependientes de parámetros, de la forma general

$$x' = f(t, x, \lambda) \tag{3}$$

donde f depende también de un cierto parámetro λ y tenemos una ecuación distinta para cada valor del parámetro. El concepto de solución general es en este caso una función $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ que depende también de λ. Este concepto incluye al anterior:

Definición 2.6 (Solución general de un sistema dependiente de parámetros)**.** Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$.

Una *solución general* de $x' = f(t, x, \lambda)$ es una función x definida en un subconjunto E de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ tal que para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ tal que la función $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ está definida en algún punto, $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0, t_0, x_0, \lambda) = x_0 \end{cases}$$

2.2. Definición de unicidad de la solución

Se podría pensar que el concepto de unicidad de solución de una ecuación diferencial no debe necesitar definición: la solución de una ecuación es única cuando sólo hay una. Aunque esencialmente es así, se requiere precisar esto un poco más, ya que no queremos considerar como distintas aquellas soluciones que son la misma función definida en intervalos distintos. De lo contrario, cualquier ecuación con solución tendría varias soluciones y el concepto no sería muy útil. Entonces, se necesita un concepto ligeramente distinto de unicidad:

Definición 2.7 (Unicidad de solución del problema de valores iniciales)**.** Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Decimos que la solución del problema de valores iniciales (2) es única cuando cualesquiera dos soluciones de (2) coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

Definición 2.8 (Unicidad de solución de la ecuación)**.** Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Decimos que la solución de $x' = f(t, x)$ es única cuando para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ (con $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$) la solución del problema de valores iniciales asociado

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

es única.

El concepto de unicidad de solución *de la ecuación* es local, en el sentido de que la siguente definición es equivalente a la anterior:

Definición 2.9. Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Decimos que la solución de (1) es única cuando para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ (con $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$), cualesquiera dos soluciones de (2) coinciden en la intersección de sus dominios de definición y un entorno de t_0.

Demostración de la equivalencia. Las condiciones de la primera definición incluyen claramente las de la segunda. Por otra parte, si x, y son dos soluciones de (1) y llamamos I a la intersección de sus dominios (un intervalo), las condiciones de la segunda definición implican que el conjunto $\tilde{I}$ donde coinciden x e y es un abierto de I. Como x, y son continuas, $\tilde{I}$ es también cerrado y es por tanto todo I. □

En el caso de que la solución de (1) sea única, la extensión a un intervalo maximal de definición de la solución de cada problema de valores iniciales también lo es. En este caso la solución general está naturalmente definida en el intervalo maximal para cada condición inicial (t_0, x_0), que solemos denotar por $I(t_0, x_0)$.

Definición 2.10 (Dominio natural de la solución general)**.** Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, y supongamos que la solución de (1) es única. El *dominio natural de la solución general* de (1) es el conjunto

$$E := \left\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mid t \in I(t_0, x_0)\right\},$$

donde $I(t_0, x_0)$ es el intervalo maximal de definición de la solución de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$. Supongamos que la solución de (3) (si existe) es única para cada $\lambda \in \mathbb{R}^k$. El *dominio natural de definición de la solución general* de $x' = f(t, x, \lambda)$ es el conjunto

$$E := \left\{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \mid t \in I(t_0, x_0, \lambda)\right\},$$

donde $I(t_0, x_0, \lambda)$ es el intervalo maximal de definición de la solución del pvi

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

En las condiciones anteriores, cuando hablemos de la solución general de (1) **o de** (3) **se dará por supuesto que está definida en su dominio natural de definición.**

La siguiente es una propiedad general de las ecuaciones diferenciales en condiciones de unicidad. Formaliza en hecho de que una misma solución de la ecuación (1) es solución de muchos problemas de valores iniciales distintos.

Proposición 2.11. *Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y supongamos que la solución de* (1) *es única. Sea x la solución general de* (1)*, definida en su dominio natural E. Entonces, para cualesquiera $(t, t_0, x_0), (t', t_0, x_0) \in E$ ocurre que $(t, t', x(t', t_0, x_0)) \in E$ y*

$$x(t, t_0, x_0) = x(t, t', x(t', t_0, x_0))$$

Observación 2.12. Se entiende mejor este hecho si se piensa en $x(\cdot, t_0, x_0)$ como "la solución que en t_0 vale x_0", y entonces el enunciado se vuelve algo evidente: "la solución que en t_0 vale x_0 es la solución que en t' vale... lo que vale esa solución en t'."

Demostración. Basta observar que $x(\cdot, t_0, x_0)$ es también una solución en $I(t_0, x_0)$ del pvi

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t') = x(t', t_0, x_0) \end{cases}$$

La unicidad prueba entonces el enunciado. □

3. Existencia y unicidad

Salvo que se indique expresamente otra cosa, a lo largo de este trabajo usaremos en $\mathbb{R}^N$ la norma del máximo,

$$\|x\| \equiv \|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_N|\} \qquad \text{para } x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

3.1. Condiciones de Carathéodory

¿Cuáles son las condiciones mínimas sobre f para que la ecuación $x' = f(t, x)$ tenga solución? Las siguientes no son mínimas, pero son unas condiciones sencillas de enunciar que cumplen ciertas propiedades razonables, como se verá a continuación. Demostraremos después que el que f las cumpla es efectivamente suficiente para que exista una solución.

Definición 3.1 (Condiciones de Carathéodory)**.** Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un subconjunto cualquiera. Decimos que $f : D \to \mathbb{R}^N$ cumple las condiciones de Carathéodory en D si $f(t, x)$ es medible en t para cada x fijo, continua en x para casi todo t fijo y para cada subconjunto compacto $K \subseteq D$ existe una función $m_K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f(t, x)\| \le m_K(t) \qquad \text{para todo } (t, x) \in K.$$

Decimos que f cumple las condiciones de Carathéodory globalmente si cumple las condiciones de Carathéodory y además m_K puede escogerse independientemente de K; esto es, existe $m \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq m(t) \quad \text{para todo } (t,x) \in D.$$

Observación 3.2. Normalmente denotaremos las variables de f como $f = f(t,x)$ con $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, de forma que cuando decimos "medible en t para cada x fijo" o "continua en x para casi todo t fijo" queremos decir, respectivamente, que las funciones

$$t \mapsto f(x,t) \quad (\text{dado } x \in \mathbb{R}^N \text{ fijo}) \tag{5}$$

$$x \mapsto f(x,t) \quad (\text{dado } t \in \mathbb{R} \text{ fijo}) \tag{6}$$

cumplen la propiedad que se enuncia. Dichas funciones están definidas en el conjunto para el que dicha definición tenga sentido. Cuando ese conjunto es vacío, las funciones anteriores cumplen trivialmente todas las propiedades que se piden. Dicho convenio de lenguaje se utilizará varias veces en estos apuntes.

Observación 3.3. La propiedad de que f cumpla las condiciones de Carathéodory a veces se denota diciendo que f es L^1 Carathéodory, porque en otros contextos se usan funciones que cumplen lo anterior para m_K en algún L^p en lugar de L^1. De estas últimas se dice que son L^p Carathéodory. No sigo esta nomenclatura porque aquí no aparecen funciones de este último tipo.

Las condiciones de Carathéodory son suficientes para asegurar que, dada una función continua x, la función $f(t,x(t))$ es localmente integrable. Esto es de hecho necesario para que la ecuación $x' = f(t,x)$ pueda tener solución en el sentido de la definición 2.1. El siguiente lema está tomado de [3]:

Lema 3.4. *Sea I un intervalo real acotado y $H : I \times I \to \mathbb{R}$ una función tal que*

$$t \mapsto H(t,s) \quad \textit{es medible para todo } s \in I \textit{ fijo}$$
$$x \mapsto H(t,s) \quad \textit{es continua para casi todo } t \in I \textit{ fijo.}$$

Entonces, la función

$$h : I \to \mathbb{R}$$
$$h(t) := H(t,t)$$

es medible.

Demostración. Dado n natural, definimos la función $h_n : I \to \mathbb{R}$ como

$$h_n(t) = \begin{cases} H(t, \frac{p-1}{n}) & \text{si } \frac{p-1}{n} \leq t < \frac{p}{n} \quad (p = 1, \dots, n) \\ H(1,1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

que es medible porque H es medible en t para todo s fijo. La sucesión de funciones h_n converge puntualmente en casi todo punto a la función $t \mapsto H(t,t)$ (converge en todo punto t para el que $H(t,\cdot)$ es continua), luego dicha función es medible. $\square$

Lema 3.5. *Sea* $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ *un subconjunto cualquiera,* $f : D \to \mathbb{R}^N$ *una función que cumple las condiciones de Carathéodory en* D*.*

Si $x : I \to \mathbb{R}^N$ *es continua y* $(t, x(t)) \in D$ *para todo* $t \in I$*, entonces cada componente de la función*

$$\begin{cases} h : I \to \mathbb{R}^N \\ t \mapsto f(t, x(t)) \end{cases} \tag{7}$$

es localmente integrable.

Demostración. Basta demostrarlo en el caso en que $f : D \to \mathbb{R}$, ya que esto se aplica a cada componente de f. Supongamos por tanto $N = 1$. La función

$$H : I \times I \to \mathbb{R}$$
$$H(t, s) := f(t, x(s))$$

está en las condiciones del Lema 3.4, luego h (definida en (7), con $N = 1$) es medible. Además, dado un compacto $J \subseteq I$, consideramos el compacto $K = J \times x(J)$ y la función integrable m_K proporcionada por las condiciones de Carathéodory. Entonces,

$$|h(t)| = |f(t, x(t))| \leq m_K(t) \quad \forall\, t \in J,$$

luego h es integrable en J. $\square$

Proposición 3.6 (Equivalencia de la ecuación integral)**.** *Sea* D *un subconjunto de* $\mathbb{R}^N$*,* $f : D \to \mathbb{R}^N$ *una función que cumple las condiciones de Carathéodory.*

Una función $x : I \to \mathbb{R}^N$ *definida en un intervalo no trivial* I *es una solución de* (2) *si y sólo si* x *es continua,* $(t, x(t)) \in D$ *para todo* $t \in I$ *y* x *cumple la siguiente ecuación integral:*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall\, t \in I$$

Demostración. Si x es solución, por definición es continua y $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$; la ecuación integral se obtiene integrando en los dos miembros y usando el teorema fundamental del cálculo.

Sea $x : I \to \mathbb{R}^N$ una función continua tal que $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$. Cada componente de la función $s \mapsto f(s, x(s))$ es localmente integrable gracias al Lema 3.5, luego la ecuación integral tiene sentido. Si x la satisface, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice entonces que x es absolutamente continua y que $x'(t) = f(t, x(t))$ c.p.d. en I; además, x cumple la condición inicial, luego es solución de (2). $\square$

3.2. Límites de soluciones

Algunas de las propiedades más usadas en relación con las ecuaciones diferenciales, ya sean ordinarias o parciales, son las propiedades de paso al límite. Este tipo de resultados hablan sobre la aproximación de las soluciones de una cierta ecuación por las de otra ecuación que sea aproximada a la original en un cierto sentido, especificando precisamente en qué sentido. Contestan a la pregunta de "si varía un poco la ecuación, ¿cuánto varía la solución?". Esta pregunta aparece detrás de tantas otras por razones fundamentales, y el intento de responderla es el motivo de una variedad enorme de teorías que están en el centro del estudio de las ecuaciones diferenciales. ¿Por qué surge esta pregunta? ¿Por qué hay que responderla?.

Una razón es que las ecuaciones diferenciales surgieron como modelos de cosas que ocurren en el mundo real. Extraer consecuencias del comportamiento de cierto objeto, como por ejemplo el vuelo de un avión, requiere conocer al menos datos iniciales sobre él, en este caso posiblemente su posición y su velocidad. Requiere también conocer la influencia de cosas externas: la atracción de la Tierra, el rozamiento con el aire, el empuje de los motores... Es un hecho que no podemos medir todas estas cosas con absoluta precisión, ni siquiera en teoría. ¿Es entonces válida la ecuación que estamos usando? ¿se parecerá su solución a la trayectoria real del avión?. Peor aún: aunque pudiésemos asegurar que la ecuación es perfectamente aplicable, en la inmensa mayoría de los casos simplemente no sabemos cómo es su solución. La única forma de calcularla en cuanto la complicación del modelo es mínimamente realista es intentar aproximarla con un ordenador, que al menos hoy no es capaz de dar una solución exacta, sino obtenida por métodos más o menos ingeniosos que proporcionan la esperanza de algo que se parezca a la solución abstracta de la ecuación inicial. Se hace necesario entonces justificar de alguna forma satisfactoria que tenemos motivos para pensar que, aunque inexacto, nuestro intento de solución no está después de todo tan lejos de lo que debería ser la solución exacta de la ecuación. Debemos responder entonces, ¿cómo de aproximadas son las ecuaciones aproximadas?.

Otro motivo más abstracto, pero igualmente fundamental: es difícil convencerse de que ciertas ecuaciones tienen de hecho, no ya esta solución concreta, sino *alguna* solución. La forma más útil y más natural que tenemos de intentar probarlo es mirar ecuaciones lo más parecidas posible pero que sean más sencillas en algún sentido, de las que ya sepamos algo, y entonces ver que una posible solución de la ecuación difícil sería también parecida a las que conocemos, aunque con sus características propias que la hacen valiosa. En muchos casos éste es esencialmente el *único* método conocido disponible, lo que da una idea de la importancia y la omnipresencia de la clase de resultados de la que hablamos. Con frecuencia éste método es también aplicable para encontrar propiedades de la solución, obtenidas como límite de las propiedades de las soluciones aproximadas.

La siguiente proposición dice que la convergencia uniforme de soluciones es solución; los resultados posteriores dirán en qué condiciones podemos asegurar que cierta sucesión de soluciones debe converger con este tipo de convergencia, y por tanto a una solución.

Proposición 3.7. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un conjunto cualquiera, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Sea $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D, y* *para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n una solución de $x' = f(t,x)$.*

Supongamos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en I a una cierta función $x : I \to \mathbb{R}^N$. Entonces x es también solución de $x' = f(t,x)$.

Demostración. Como $\{x_n\}$ es una sucesión uniformemente convergente en compactos de funciones continuas, x es continua.

Sea $J \subseteq I$ un intervalo compacto cualquiera, y $t_0 \in J$. Ver que x es solución en J equivale a demostrar que, para $t \in J$,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

sabiendo que cada x_n cumple, para $t \in J$,

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds, \tag{8}$$

de forma que el problema consiste en pasar al límite en esta ecuación.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\begin{aligned} &h_n : J \to \mathbb{R}^N \\ &h_n(s) := f(s, x_n(s)). \end{aligned}$$

Como $\{x_n\}$ converge (en particular) puntualmente y f es continua en la variable x, la sucesión de funciones $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función $f(\cdot, x(\cdot))$. Gracias a la continuidad de x y de nuevo a la convergencia uniforme de la sucesión, existe un compacto $C \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $x_n(J) \subseteq C \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, y si usamos la cota m en el compacto $J \times C$ dada por las condiciones de Carathéodory sobre f,

$$\|h_n(s)\|_\infty \le m(s) \quad \forall\, s \in J.$$

El teorema de la convergencia dominada nos permite pasar al límite en (10) y asegurar entonces que x es solución en J. Por tanto, x es solución en I, ya que J era un subintervalo compacto arbitrario de I. $\square$

De hecho, no es difícil encontrar condiciones que garantizan que una sucesión de soluciones como las anteriores tiene una parcial que converge uniformemente:

Proposición 3.8. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un conjunto cualquiera, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo* compacto, *$t_0 \in J$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory* globalmente *en D. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n : J \to \mathbb{R}^N$ una solución de $x' = f(t,x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0^n$.*

Supongamos que $\{x_0^n\}$ es una sucesión acotada. Entonces $\{x_n\}$ tiene una parcial que converge uniformemente en J a una solución x de $x' = f(t,x)$.

Para demostrar esto conviene separar dos resultados que son de por sí interesantes, aunque elementales. Es conocido que las funciones absolutamente continuas son, en particular, uniformemente continuas. Decimos que una sucesión de funciones $y_n : I \to \mathbb{R}$, con I un intervalo, es *uniformemente absolutamente continua* cuando cada y_n es absolutamente continua y además sus derivadas están acotadas por una función integrable independiente de n; es decir, cuando hay una función m integrable en $\mathbb{R}$ tal que

$$|y_n'(t)| \leq m(t) \quad \text{p.c.t. } t \in I, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Lema 3.9. *Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente absolutamente continua de funciones reales definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, $\{y_n\}$ es equicontinua.*

Demostración. Sea m una cota de y_n' independiente de n. Para $t > t' \in I$, por el teorema fundamental del cálculo,

$$|y_n(t') - y_n(t)| = \left| \int_t^{t'} y_n'(s)\, ds \right| \leq \int_t^{t'} |y_n'(s)|\; ds \leq \int_t^{t'} m(s)\, ds = |M(t') - M(t)|\,,$$

donde hemos fijado $t_0 \in I$ y definimos $M(t) := \int_{t_0}^t m(s)\, ds$, una función continua en I.

Esto prueba que la continuidad de y_n es independiente de n, y por tanto la sucesión es equicontinua. □

Lema 3.10. *Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente absolutamente continua de funciones reales definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.*

Si para algún $t_0 \in I$ ocurre que $\{y_n(t_0)\}$ es una sucesión acotada, entonces $\{y_n\}$ está acotada uniformemente en compactos de I.

Demostración. Sea M una cota de $\{y_n(t_0)\}$ independiente de n, y $m(s)$ una cota integrable de la derivada de y_n, también independiente de n. Si $J \subseteq I$ compacto, no tenemos más que escribir, para $t \in J$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(t)| = \left| y_n(t_0) + \int_{t_0}^t y_n'(s)\, ds \right| \leq |y_n(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t |y_n'(s)|\; ds \right| \leq M + \int_J m(s)\, ds,$$

lo cual es una cota independiente de n. □

Demostración de la proposición 3.8. Las funciones x_n son absolutamente continuas y como son solución de la ecuación $x' = f(t,x)$ ocurre que para cada componente $(x_n)_i$ de x_n ($i = 1, \dots, N$), para casi todo $t \in J$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$|(x_n)_i(t)| \leq \|x_n'(t)\| = |f(t, x_n(t))| \leq m(t)$$

con m una cota de Carathéodory de f. Además, $\{x_n(t_0)\}$ está acotada por hipótesis, luego podemos aplicar los lemas 3.9 y 3.10 para ver que $\{x_n\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua en J (ya que todas sus componentes lo son).

Por el teorema de Ascoli-Arzelà, $\{x_n\}$ tiene una parcial que converge uniformemente en J, y su límite es solución de $x' = f(t,x)$ gracias a la Proposición 3.7. □

Este resultado puede extenderse de varias formas: una de ellas es considerar que las soluciones x_n, en lugar de ser soluciones de la misma ecuación, lo son de ecuaciones aproximadas en cierta forma. Entonces, un tipo adecuado de convergencia es necesaria. Un ejemplo de este resultado es el siguiente:

Proposición 3.11. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un conjunto cualquiera, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n : D \to \mathbb{R}^N$. Supongamos que las funciones r_n cumplen las condiciones de Carathéodory de forma que en cada compacto, las integrales de sus cotas tienden a cero; dicho más exactamente, suponemos que para cada $K \subseteq D$ compacto existen funciones reales integrables $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\|r_n(t,x)\| \leq m_n(t) \ \forall\, (t,x) \in K$ y

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} m_n(s)\, ds = 0. \tag{9}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n una solución en I de la ecuación

$$x' = f(t,x) + r_n(t,x).$$

Supongamos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en compactos de I a una cierta función $x : I \to \mathbb{R}^N$. Entonces x es también solución de $x' = f(t,x)$ en I.

Demostración. Se trata de repetir la prueba de la proposición 3.7, pasando ahora al límite en

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} r_n(s, x_n(s))\, ds. \tag{10}$$

El único término nuevo es la segunda integral, que converge a cero gracias a la hipótesis (9), usando las cotas correspondientes en el mismo compacto $J \times C$ de la demostración de la proposición 3.7. □

Proposición 3.12. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un conjunto cualquiera, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo* compacto, *$t_0 \in J$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory* globalmente *en D.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n : D \to \mathbb{R}^N$, y supongamos que las funciones r_n cumplen las condiciones de Carathéodory globalmente en D con cotas m_n, de forma que

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} m_n(s)\, ds = 0. \tag{11}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n : J \to \mathbb{R}^N$ una solución de $x' = f(t,x) + r_n(t,x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0^n$.

Supongamos que $\{x_0^n\}$ es una sucesión acotada. Entonces $\{x_n\}$ tiene una parcial que converge uniformemente en J a una solución x de $x' = f(t,x)$.

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que la de la proposición 3.8, pero se necesita un detalle técnico: probemos que existe una parcial de $\{r_n\}$ (a la que llamamos igual) y una función real R integrable tal que

$$\|r_n(t,x)\| \leq R(t) \quad \forall\, (t,x) \in D.$$

De hecho, si tomamos una parcial tal que

$$\int_{\mathbb{R}} m_n(s)\, ds \leq \frac{1}{2^n},$$

y definimos $R := \sum_{i=1}^{\infty} m_n$ (posiblemente infinita en algunos puntos), entonces

$$\int_{\mathbb{R}} R(s)\, ds \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Como su integral es finita, R es finita en casi todo punto y además cumple lo que queríamos.

Usando esta parcial podemos entonces llevar a cabo el mismo razonamiento que en 3.8. Teniendo en cuenta que si m es una cota de Carathéodory de f en J,

$$\|x_n'(t)\| \leq m(t) + R(t) \quad \text{p.c.t. } t \in J,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

los lemas 3.9 y 3.10 prueban que la sucesión $\{x_n\}$ está uniformemente acotada y es equicontinua. Por el teorema de Ascoli-Arzelà, $\{x_n\}$ tiene una parcial que converge uniformemente en J, y su límite es solución de $x' = f(t,x)$ gracias a la Proposición 3.11. □

Observación 3.13. Estos teoremas de convergencia no son suficientes para algunas aplicaciones muy naturales. Por ejemplo, frecuentemente resulta útil aproximar las soluciones de una ecuación por soluciones de ecuaciones más regulares, con mejores propiedades. Una forma de hacer esto para aproximar soluciones de $x' = f(t,x)$ es considerar soluciones de la ecuación regularizada por convolución $x' = (f * \phi_n)(t,x)$, donde $\{\phi_n\}_n$ es una sucesión regularizante en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ (una sucesión de funciones diferenciables con integral uno y con soporte contenido en entornos del origen cada vez más pequeños). Pues bien: los teoremas anteriores, hasta donde sé, no bastan para pobar que una parcial de las soluciones regulares converja a la (o a una) solución de la ecuación original. En realidad, tampoco sé si esto es verdad en condiciones generales (por ejemplo, cuando f cumple las condiciones de Carathéodory), y sospecho que tal vez sea necesario añadir alguna otra hipótesis sobre f. Agradezco cualquier sugerencia sobre esto.

3.3. Existencia

Teorema 3.14 (Existencia global)**.** *Sea I es un intervalo real no trivial y $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.*

Si f satisface las condiciones de Carathéodory globalmente en $I \times \mathbb{R}^N$, entonces para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, existe una solución de (2) definida en I.

Demostración. Sea $x_1 : I \to \mathbb{R}^N$ una función continua. Consideramos la sucesión de funciones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \quad t \in I, n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

La expresión de la derecha tiene sentido (ver Lema 3.5). Para esta sucesión de funciones no podemos aplicar directamente la proposición 3.8, pero la idea es la misma. Para ver que $\{x_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en compactos no tenemos más que tomar un compacto $J \subseteq I$ cualquiera y, esencialmente, repetir los cálculos que ya hicimos: Para $n \in \mathbb{N}$, $t \in J$,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(t)\| &\leq \|x_0\| + \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds\right\| \\ &\leq \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s, x_n(s))\|\, ds\right| \leq \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} m(s)ds\right| < \infty\end{aligned}$$

Por otra parte, para $t, t' \in J$, con m una cota de Carathéodory de f en algún entorno compacto de $\{(t, x(t)) \mid t \in J\}$,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t')\| &\leq \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds - \int_{t_0}^{t'} f(s, x_n(s))\, ds\right\| \\ &= \left\|\int_{t'}^{t} f(s, x_n(s))\, ds\right\| \leq \left|\int_{t}^{t'} \|f(s, x_n(s))\|\, ds\right| \\ &\leq \int_{t}^{t'} m(s)\, ds = \left|\int_{t_0}^{t} m(s)\, ds - \int_{t_0}^{t'} m(s)\, ds\right| = |M(t) - M(t')|,\end{aligned}$$

donde M es, como antes, $M(t) := \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds$ para $t \in J$.

Por el teorema de Ascoli-Arzelà 5.2, $\{x_n\}$ tiene una parcial uniformemente convergente en compactos de I a una cierta función x. Pasando al límite en (12) de la misma forma que en la demostración de la proposición 3.7, x es una solución en I de $x' = f(t, x)$. □

Este teorema global se enuncia más frecuentemente en su versión local, que demostramos a continuación. Aunque la demostración del resultado local podría hacerse de forma muy parecida a la del anterior (ver por ejemplo [2], [5] o [3]), puede demostrarse también a partir de éste, mostrando una técnica muy útil.

Teorema 3.15 (Existencia local)**.** *Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, y supongamos que (t_0, x_0) es un punto de su interior.*

Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D, entonces existe una solución de (2) definida en un entorno de t_0.

Demostración. Sea $(t_0, x_0) \in D$, y tomemos K un entorno compacto de (t_0, x_0) y $U \subseteq D$ un abierto relativamente compacto que contenga a K y tal que $\bar{U} \subseteq D$. Se sabe entonces que existe una función positiva $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que ϕ vale 1 en K y 0 fuera de U, y $|\phi|$ es siempre ≤ 1. Definimos $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ como $\tilde{f} := f\phi$ en U, $\tilde{f} \equiv 0$ fuera de U. Esta $\tilde{f}$ cumple las condiciones de Carathéodory (tiene la misma regularidad que f y es siempre $\leq f$), y además las cumple globalmente:

$$\left\|\tilde{f}(x,t)\right\| \leq m_{\bar{U}}(t) \ \forall \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

donde $m_{\bar{U}}$ es la cota que da la condición (3.1) para el compacto $\bar{U}$. Podemos entonces aplicar el Teorema 3.14 al problema

$$\begin{cases} x' = \tilde{f}(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{13}$$

y deducir que tiene una solución x definida en $\mathbb{R}$. Como es continua podemos tomar $J \subseteq \mathbb{R}$ un entorno compacto de t_0, no trivial, tal que $(t, x(t)) \in K \ \forall \ t \in J$. Entonces, como $f = \tilde{f}$ en K, x cumple el problema de valores iniciales (2) en J. □

3.4. Prolongación de soluciones

Lema 3.16. *Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory globalmente en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t,x)$ definida en un intervalo $[a, b[$.*

Si x tiene un cierto límite $x(b)$ en b y ocurre que $(b, x(b))$ está en el interior de D, entonces x puede prolongarse a una solución en un intervalo $[a, b+\epsilon[$ para cierto $\epsilon > 0$.

Demostración. El teorema de existencia local nos da una solución y de $x' = f(t,x)$ con valor inicial $y(b) = x(b)$, definida en un entorno de b. Si extendemos entonces $x(t) := y(t)$ para $t \geq b$, x es también una solución de $x' = f(t,x)$, ya que es continua en b y cumple la ecuación. □

Lema 3.17. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D.*

Cualquier intervalo maximal de definición de cualquier solución de $x' = f(t,x)$ es abierto.

Demostración. De lo contrario, x tiene límite en el extremo (las soluciones son continuas) y el lema 3.16 prueba que es posible extenderla. □

El siguiente resultado dice que si f cumple las condiciones de Carathéodory globalmente, las soluciones siempre tienen límite en sus extremos:

Lema 3.18. *Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory globalmente en D. Supongamos que x es una solución definida en un cierto intervalo $]a, b[$ de la ecuación $x' = f(t, x)$.*

Entonces, $x(t)$ tiene límite (posiblemente infinito) cuando t tiende a cualquiera de los extremos a, b.

Demostración. Lo probaremos para uno de los extremos, por ejemplo b.

Si $\lim_{t\to b} x(t)$ existe y es infinito, hemos terminado. De lo contrario, podemos tomar una sucesión t_n en $]a, b[$, que tienda a b, tal que $\{x(t_n)\}$ está uniformemente acotada; tomando una parcial suya podemos suponer que $x(t_n)$ tiene un cierto límite finito $\alpha \in \mathbb{R}^N$.

Para $t \in]a, b[$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$\|x(t) - \alpha\| \leq \|x(t) - x(t_n)\| + \|x(t_n) - \alpha\| .$$

Por otra parte, si m es una cota de Carathéodory de f,

$$\|x(t) - x(t_n)\| \leq \left|\int_t^{t_n} \|f(s, x(s))\| \, ds\right| \leq \left|\int_t^{t_n} m(s) \, ds\right| \leq \int_t^b m(s) \, ds.$$

Por tanto, para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in]a, b[$,

$$\|x(t) - \alpha\| \leq \int_t^b m(s) \, ds + \|x(t_n) - \alpha\|$$

luego, tomando límite en n,

$$\|x(t) - \alpha\| \leq \int_t^b m(s) \, ds.$$

Esto prueba que x tiene límite α en b. □

Lema 3.19. *Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t, x)$ definida en un intervalo $]a, b[$ con $a < b$.*

Si hay una sucesión $\{t_n\}$ de puntos de $]a, b[$ que tiende a b y tal que $(t_n, x(t_n))$ tiende a un punto del interior de D, entonces x tiene límite en b.

Se tiene también el resultado análogo en el extremo a.

Demostración. No podemos aplicar directamente el lema anterior porque f no cumple las condiciones de Carathéodory globalmente; sin embargo, veamos que para t cerca de b, $(t, x(t))$ se queda dentro de un entorno compacto de (b, z), donde las condiciones de Carathéodory sí se cumplen globalmente.

Tomemos $h > 0$, $r > 0$ tales que $K = [b-h, b] \times B(z,r) \subseteq D$. Sea n suficientemente grande para que $t_n \in [b-h, b[$, $\|x(t_n) - z\| < \frac{r}{2}$ y ocurra que

$$\int_{t_n}^{b} m(s)\,ds < \frac{r}{2},$$

con m una cota de Carathéodory de f en K.

Veamos que $(t, x(t)) \in K$ para $t \in [t_n, b[$. De lo contrario, tomemos el primer $t' \in]t_n, b[$ tal que $x(t') \in \partial B(z,r)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x(t') - z\| \leq \|x(t') - x(t_n)\| + \|x(t_n) - z\| &< \frac{r}{2} + \int_{t_n}^{t'} \|f(s, x(s))\|\,ds \\ &\leq \frac{r}{2} + \int_{t_n}^{t'} m(s)\,ds \leq \frac{r}{2} + \int_{t_n}^{b} m(s)\,ds < r, \end{aligned}$$

luego $x(t')$ está en el interior de $B(z,r)$, una contradicción.

Por tanto, $(t, x(t)) \in K$ para $t \in [t_n, b[$ y podemos aplicar el lema anterior 3.18 para decir que $\lim_{t \to b} x(t) = z$. $\square$

Corolario 3.20. *Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t,x)$ definida en un intervalo maximal I, y que el extremo derecho [izquierdo] de I es un número finito t^*.*

Sea $\{t_n\}$ una sucesión en I tal que $t_n \to t^*$. Entonces o bien $\|x_n\| \to \infty$ o bien $\{t_n\}$ tiene una parcial $\{t_{\sigma n}\}$ tal que $(t_{\sigma n}, x(t_{\sigma n}))$ tiende a un punto de la frontera de D.

Demostración. Lo contrario de la conclusión es que hay una cierta sucesión $t_n \to t^*$ tal que $(t_n, x(t_n))$ converge a un punto (t^*, z) del interior de D. El lema 3.19 prueba que x tiene límite en t^*, y teorema de existencia local 3.15 nos permite entonces prolongar la solución más allá de t^*, lo cual contradice que el intervalo de definición de la solución fuera maximal. $\square$

Una forma de ver el resultado anterior es pensar que en las mismas hipótesis, $(t, x(t))$ "tiende a la frontera de D" cuando $t \to t^*$, con el siguiente significado (ver [5], pág. 13):

Definición 3.21. Sea I un intervalo real, t^* un punto del cierre de I, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un abierto y α una función $\alpha : I \to D$.

Decimos que $\alpha(t)$ tiende a la frontera de D cuando $t \to t^*$ si para cualquier compacto $K \subseteq D$ existe un cierto $\epsilon > 0$ tal que si $t \in I$ con $|t - t^*| \leq \epsilon$, entonces $\alpha(t) \notin K$.

Si I no es acotado a la derecha, decimos que $\alpha(t)$ tiende a la frontera de D cuando $t \to \infty$ si para cualquier compacto $K \subseteq D$ existe un cierto $M > 0$ tal que si $t > M$, entonces $\alpha(t) \notin K$.

Se tiene también la definición análoga para $-\infty$.

Es decir: una función tiende a la frontera de D si a partir de un cierto punto se queda fuera de cualquier compacto de D que elijamos.

Observación 3.22. Obsérvese que si D es acotado, entonces α tiende a la frontera de D en el sentido usual de convergencia hacia un conjunto: la distancia entre α y la frontera de D tiende a cero.

El corolario anterior demuestra este comportamiento:

Corolario 3.23. *Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t, x)$ definida en un intervalo maximal $I =]a, b[$, donde a, b pueden ser posiblemente infinitos.*

Entonces, $(t, x(t))$ tiende a la frontera de D cuando $t \to b$ (y también cuando $t \to a$).

Demostración. Lo demostraremos para b. Supongamos que no ocurre esto. Entonces hay un cierto compacto $K \subseteq D$ y una sucesión de puntos $t_n \in I$ tal que $t_n \to b$ y $(t_n, x(t_n)) \in K$. Como K es acotado, esto implica que b debe ser finito. Entonces el corolario 3.20 da dos posibilidades: o bien $\|x(t_n)\| \to \infty$ (lo cual no es posible de nuevo porque K es acotado), o bien una parcial de $(t_n, x(t_n))$ tiende a un punto de la frontera de D, pero esto tampoco es posible porque esta sucesión está en K y el cierre de K (el propio K) no tiene intersección con la frontera de D. □

A veces es útil tener una cota inferior de la longitud del intervalo hasta donde puede definirse la solución cuya existencia demostramos antes, saber de qué depende. El siguiente resultado consigue esto:

Teorema 3.24 (Existencia local, segunda versión)**.** *Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, y C el "rectángulo" $[t_0, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r)$. Sea $f : C \to \mathbb{R}^N$ una función que satisface las condiciones de Carathéodory en C con cota m, y sea $\beta > 0$ tal que*

$$\int_{t_0}^{t_0+\beta} m(s)\, ds < r$$

Entonces cualquier solución del pvi

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{14}$$

puede extenderse al menos a $[t_0, t_0 + a]$ con $a = \min \alpha, \beta$.

Demostración. De lo contrario, estará definida en un intervalo $[t_0, t^*[$ maximal a la derecha, con $t^* < t_0 + \alpha$, $t^* < t_0 + \beta$. Como C es acotado, el corolario 3.20 (ver también la observación 3.22) dice que $x(t)$ tiende a la frontera de $\bar{B}(x_0, r)$ cuando $t \to t^*$. Pero esto no es posible, ya que para $t \in [t_0, t^*[$,

$$\|x(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds \leq \int_{t_0}^{t_0+\beta} m(s)\, ds < r.$$

□

Lema 3.25. *Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función cualquiera, y sea x una solución de $x' = f(t,x)$ definida en un intervalo $[a,b[$.*

Entonces se da el recíproco del corolario 3.20. Es decir, si para cierta sucesión $\{t_n\}$ con $t_n \to b$ ocurre que $\lim x(t_n)$ es infinito o $(t_n, x(t_n))$ tiende a un punto de la frontera de D, entonces $[a,b[$ es maximal a la derecha.

Demostración. Es evidente si el límite es infinito. En el otro caso, por continuidad cualquier posible extensión a la derecha de x cumple que $(b, x(b))$ pertenece a la frontera de D, fuera de D, en contradicción con la definición de solución. □

3.5. Desigualdades diferenciales

El objetivo de esta sección es mostrar algunos resultados sobre comparación entre soluciones. Por esto, las ecuaciones serán siempre de una sóla incógnita, es decir, del tipo $x' = f(t,x)$ con f real definida en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^2$, de forma que sus soluciones son funciones reales y no vectoriales como en los apartados anteriores.

Definición 3.26. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto cualquiera. Sea $(t_0, x_0) \in D$.

Una *solución maximal* de la ecuación

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{15}$$

es una solución x de dicha ecuación, definida en un intervalo maximal I y tal que si $y : I_1 \to \mathbb{R}$ es otra solución de $x' = f(t,x)$ definida en t_0 con $y(t_0) \leq x_0$, entonces

$$y(t) \leq x(t) \quad \forall\, t \in I \cap I_1.$$

Una *solución minimal* se define de forma análoga.

Una *solución maximal local* es lo mismo que una solución maximal, pero sin la condición de estar definida en un intervalo maximal; es decir, una solución maximal local es lo que dice la definición anterior cambiando "definida en un intervalo maximal" por "definida en un intervalo no trivial cualquiera I". Análogamente definimos una *solución minimal local*.

Es claro que una solución maximal local o minimal local en un intervalo dado, si existe, es única, ya que cualquier otra que lo sea debe ser a la vez mayor y menor que ella.

Uno de los resultados principales de esta sección es que las soluciones de dos ecuaciones pueden compararse; o, visto de otra forma, que las desigualdades diferenciales pueden resolverse como se hace con las ecuaciones. Lo que dice el siguiente resultado es que si sabemos que $y'(t) \leq f(t, y(t))$, entonces y es siempre menor que la solución de la ecuación $x' = f(t,x)$ con el mismo valor inicial, o mayor.

Teorema 3.27 (Solución de una desigualdad diferencial). *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory.*

Sea x una solución maximal local de $x' = f(t, x)$ definida en $[t_0, b[$ para ciertos $t_0 < b \in \mathbb{R}$. Supongamos que $y : [t_0, b[\to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua tal que

$$\begin{aligned} &y'(t) \leq f(t, y(t)) \qquad p.c.t.\ t \in [t_0, b[\\ &y(t_0) \leq x(t_0). \end{aligned}$$

Entonces,

$$y(t) \leq x(t) \qquad \forall\, t \in [t_0, b[.$$

La demostración de este resultado es fácil para soluciones en el sentido clásico, ya que basta con analizar qué ocurre en caso de que las soluciones se corten: si se cortan en un punto t_1 donde $y'(t_1) < f(t_1, y(t_1)) = f(t_1, x(t_1)) = x'(t_1)$, entonces y sigue siendo menor que x un poco a la derecha de t_1. Si ocurre que $y'(t_1) = f(t_1, y(t_1))$, entonces se puede aproximar y uniformemente por soluciones que están en el caso anterior. Esta demostración puede encontrarse en [5]. Sin embargo, en el caso presente para soluciones en el sentido de Carathéodory, la demostración requiere otro método, porque las soluciones no tienen por qué ser derivables en todo punto, y podrían no serlo donde se corten. Además, parece que se requieren condiciones adicionales sobre f para poder aproximar uniformemente estas soluciones por soluciones clásicas (ver observación 3.13). Me costó encontrar una forma de probarlo, y no he podido encontrar el resultado en [5], [8] o [7].

Demostración. De lo contrario, ocurre que $y(t_1) > x(t_1)$ para cierto $t_1 \in]t_0, b[$. Como tanto x como y son continuas, podemos tomar el primer punto $\tilde{t_0} \in [t_0, t_1[$ donde x e y se cortan antes de t_1, es decir, tal que $x(\tilde{t_0}) = y(\tilde{t_0})$ y $x(t) < y(t)$ para $t \in]\tilde{t_0}, t_1[$. Vemos entonces que es suficiente llegar a una contradicción con las hipótesis del teorema y suponiendo que $x(t_0) = y(t_0)$ y que $x(t) < y(t)$ para $t \in [t_0, b[$, ya que en ese caso podemos aplicarlo al intervalo $[\tilde{t_0}, t_1[$ y terminar.

Por tanto, suponiendo esto, definamos la función $g : D \to \mathbb{R}$ por

$$g(s, z) = \begin{cases} f(s, y(s)) & \text{si } s \in]t_0, b[\quad \text{y} \quad z < y(s) \\ f(s, z) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que el conjunto usado para partir la definición de g es abierto, ya que y es continua. Llamemos A a dicho conjunto:

$$A := \{(s, z) \in D \mid s \in]t_0, b[\text{ y } z < y(s)\}.$$

La función g cumple las condiciones de Carathéodory en D:

- Para cada z fijo es medible. Si fijamos z, $g(\cdot, z)$ coincide con $f(\cdot, y(\cdot))$ en el abierto $\{s \mid (s, z) \in A\}$ y es igual a $f(s, z)$ fuera de él. En ambos conjuntos es medible, luego es medible.

- Para casi todo s fijo es continua, ya que si fijamos s tal que $f(s,\cdot)$ es continua (lo cual ocurre para casi todo s, ya que f cumple las condiciones de Carathéodory), entonces $g(s,\cdot)$ es continua: coincide con $f(s,\cdot)$ siempre, o bien coincide con $f(s,\cdot)$ en un intervalo, es constantemente $f(s,y(s))$ en otro y es continua en el punto de unión.
- Si m es una cota de Carathéodory de f en un compacto $K \subseteq D$, entonces la función dada por $\tilde{m}(s) := m(s) + f(s,y(s))$ si $s \in [t_0, b[$ y que coincide con m si $s \notin [t_0, b[$ sirve como cota de Carathéodory para g en K.

Entonces el teorema de existencia local 3.15 dice que existe una solución u definida al menos en $[t_0, a[$ para cierto $t_0 < a \leq b$ del problema

$$\begin{cases} u' = g(t,u) \\ u(t_0) = x(t_0) = y(t_0) \end{cases}$$

Dicha solución u tiene que ser mayor o igual que y. De lo contrario, ocurre que $u(s) < y(s)$ para s en cierto subintervalo $]t_1, t_2[$ con $u(t_1) = y(t_1)$. Entonces por el teorema fundamental del cálculo, para $t \in]t_1, t_2[$

$$\begin{aligned} u(t) - y(t) &= \int_{t_1}^{t} (g(s,u(s)) - y'(s))\, ds \\ &\geq \int_{t_1}^{t} (g(s,u(s)) - f(s,y(s)))\, ds = \int_{t_1}^{t} (f(s,y(s)) - f(s,y(s)))\, ds = 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice lo anterior. Pero entonces, por definición de g, ocurre que u es también solución de $x' = f(t,x)$ y cumple que $u \geq y > x$ en $]t_0, a[$, lo cual contradice el que x sea una solución maximal local. $\square$

Lema 3.28. *Sean $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ y C el rectángulo $[t_0, t_0 + \alpha] \times [x_0 - r, x_0 + r]$. Sea $f : C \to \mathbb{R}$ una función que satisface las condiciones de Carathéodory en C con cota m, y sea $\beta > 0$ tal que*

$$\int_{t_0}^{t_0+\beta} m(s)\, ds < r.$$

Llamemos $a = \min \alpha, \beta$. Entonces, existe una solución maximal local x de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{16}$$

definida al menos en $[t_0, t_0 + a]$.

Se tiene también el resultado correspondiente para soluciones minimales locales.

Demostración. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : C \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(t,x) := f(t,x) + \frac{1}{n} \quad \forall\, (t,x) \in C.$$

La función que vale $m(t)+\frac{1}{n}$ para $t\in[t_0,t_0+\alpha]$ y cero fuera sirve como cota de Carathéodory para f_n. Además, para n grande se cumple que

$$\int_{t_0}^{t_0+\beta}(m(s)+\frac{1}{n})\,ds<r,$$

luego todas las soluciones del problema

$$\begin{cases} x'=f_n(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{17}$$

están definidas, para todo n mayor que un cierto $m\in\mathbb{N}$, al menos en $[t_0,t_0+a]$ gracias al teorema 3.24. Tomemos, para cada $n>m$, una solución x_n de (17). Usando la proposición 3.12 podemos encontrar una parcial suya que converge uniformemente a una solución x de (16) en $[t_0,t_0+a]$. Veamos que dicha x es una solución maximal local.

Si no fuese así, hay una solución y de $x'=f(t,x)$ con $y(t_0)=x_0$ tal que $y(t)>x(t)$ para cierto $t>t_0$. Entonces para cierto n suficientemente grande $y(t)>x_n(t)$, pero esto no es posible por el teorema 3.27, ya que

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y(t))\le f(t,y(t))+\frac{1}{n} \\ y(t_0) &= x_0=x(t_0). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.29. *Sea $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ un abierto, $f:D\to\mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory en D, $(t_0,x_0)\in D$. Entonces, existe una solución maximal x del pvi*

$$\begin{cases} x'=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{18}$$

Demostración. Llamemos t^* al siguiente supremo, posiblemente infinito:

$$t^*:=\sup\{t>t_0 \mid \text{ existe una solución maximal local definida en } [t_0,t[\}$$

Como las soluciones maximales locales son únicas en cada intervalo, podemos definir una función como en la demostración de la proposición 2.3 sobre existencia de soluciones definidas en un intervalo maximal: para cualquier $t\in[t_0,t^*[$,

$$x(t):=y(t)\quad \text{para cualquier } y \text{ solución maximal local de (18) definida en } t$$

Dicha x es una solución (lo es en cada compacto). Hemos terminado si probamos que su intervalo de definición es maximal a la derecha, porque entonces podemos hacer lo análogo para encontrar una solución en un intervalo $]t_*,t_0]$ maximal a la izquierda y uniendo las dos obtener una solución maximal.

Si t^* es infinito hemos acabado, así que supongamos que es finito. Si $[t_0, t^*[$ no es maximal a la derecha, entonces el lema 3.25 asegura que hay una sucesión t_n que tiende a t^* tal que $(t_n, x(t_n))$ tiende a un punto de D, y entonces el lema 3.19 prueba que de hecho existe el límite en t^* de x. El lema 3.28 nos permite extender la solución x a un intervalo mayor a la derecha, de forma que la solución extendida siga siendo maximal, contradiciendo la definición de t^*. □

3.6. Unicidad

La siguiente versión del lema de Gronwall está tomada de [3].

Teorema 3.30 (Lema de Gronwall)**.** *Sean $\alpha \geq 0$, I un intervalo real y $t_0 \in I$. Sean $x, \mu : I \to \mathbb{R}$ funciones no negativas, con x continua y μ integrable. Si se cumple que*

$$x(t) \leq \alpha + \left| \int_{t_0}^{t} \mu(s) x(s)\, ds \right| \qquad \forall\, t \in I$$

entonces

$$x(t) \leq \alpha \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} \mu(s)\, ds \right| \right) \qquad \forall\, t \in I$$

Definición 3.31 (Lipschitz con constante integrable)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}^n$ definida en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (de la que denotamos las variables como $f = f(t, x)$) se dice que es *localmente Lipschitz con respecto a x con constante integrable* cuando para cada compacto $K \subseteq D$ existe una función $k_K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k_K(t)\, |x - y| \qquad \text{para } (t,x), (t,y) \in K$$

Decimos que f es *globalmente Lipschitz con respecto a x con constante integrable* cuando se cumple la condición anterior para cierta $k \in L^1(\mathbb{R})$ independiente del compacto; esto es, existe $k \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)\, |x - y| \qquad \text{para } (t,x), (t,y) \in D$$

Teorema 3.32 (Unicidad)**.** *Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D y es localmente Lipschitz con constante integrable, entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in D$ la solución de (2) es única.*

Demostración. Supongamos que x, y son dos soluciones de (2) definidas en un cierto intervalo compacto J. Entonces, usando una constante de Lipschitz $k(t)$ de f en un compacto K tal que tanto $J \times x(J)$ como $J \times y(J)$ están contenidos en K,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} k(s)\, \|x(s) - y(s)\|\, ds \leq \|x - y\|_\infty \int_J k(s)\, ds \end{aligned}$$

Por tanto la solución es única en un entorno de t_0, luego es única (ver la Definición 2.9 y los comentarios anteriores). □

4. Regularidad

4.1. Reducciones del problema

Los siguientes argumentos aparecen en el libro de Hartman [5].

Al obtener propiedades de regularidad de la solución general de (1) o de (3) a partir de propiedades de la ecuación (esto es, propiedades de la función f) pueden hacerse algunas reducciones importantes. Si tenemos $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$, consideremos la ecuación siguiente, dependiente de parámetros:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

Una función $x : E \to \mathbb{R}^N$ ($x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$) definida en un subconjunto E de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ es una solución general de esta ecuación si y sólo si la función

$$\begin{aligned} &\tilde{x} : E \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \\ &\tilde{x}(t, t_0, x_0, \lambda) := (x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \end{aligned}$$

es solución general de la ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(t, x, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \lambda(t_0) = \lambda \end{cases}$$

Esta última ecuación no depende de parámetros. Esto permite obtener resultados sobre la regularidad con respecto a x_0, λ de las soluciones de una ecuación dependiente de parámetros trabajando únicamente con ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{21}$$

La segunda reducción, que tiene ciertas desventajas que indicaremos ahora, consiste en obtener regularidad con respecto al tiempo inicial t_0 de las soluciones de una ecuación cualquiera a partir de la regularidad con respecto a valores iniciales y parámetros de otra ecuación. Si tenemos $f : D \to \mathbb{R}^N$, con D un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$, una función $x : E \to \mathbb{R}^N$ definida en un subconjunto E de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ es una solución general de $x' = f(t, x, \lambda)$ si y sólo si la función

$$\begin{aligned} &y : G \to \mathbb{R}^N \\ &y(t, t_0, x_0, \lambda) := x(t + t_0, t_0, x_0, \lambda) - x_0 \end{aligned}$$

(definida en un cierto conjunto G para el que el término de la derecha tiene sentido) es, para cada t_0, x_0, λ fijos para los que esté definida, solución de

$$\begin{cases} y' = f(t + t_0, y + x_0, \lambda) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

y ésta es una ecuación con parámetros y condición inicial fija.

Esencialmente, la primera reducción nos permite evitar los parámetros estudiando una ecuación en la que sólo varían las condiciones iniciales; la segunda nos permite fijar el tiempo al precio de estudiar una ecuación que depende de parámetros adicionales.

La desventaja que mencionaba al principio es que los resultados obtenidos usando esta reducción de forma directa parecen ser sistemáticamente más débiles que los que pueden obtenerse por otros métodos. Por esto las demostraciones de esta sección no la usan y en su lugar demuestran regularidad con respecto a las condiciones iniciales t_0, x_0, obteniendo regularidad con respecto a parámetros como consecuencia de la primera reducción.

4.2. Continuidad con respecto a las condiciones iniciales

Lema 4.1. *Sea I un intervalo real, $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory globalmente y que es globalmente Lipschitz con respecto a x con constante integrable. Entonces la solución general de* (1) *es continua (en todas sus variables).*

Demostración. Sea m la cota de las condiciones de Carathéodory, y k la constante de Lipschitz integrable. Recordemos que por el Teorema 3.14, la solución general de (1) está definida en $I \times I \times \mathbb{R}^N$. Sean $t, t', t_0, t_0' \in I$, $x_0, x_0' \in \mathbb{R}^N$. Entonces, usando la ecuación integral y el lema de Gronwall, tenemos los siguientes resultados:

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0')\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} k(s) \, \|x(s, t_0, x_0) - x(s, t_0, x_0')\| \, ds \right|,$$

luego

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0')\| \leq \|x_0 - x_0'\| \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} k(s) \, ds \right| \right). \tag{22}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
&\|x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0',x_0)\| \\
&\qquad\qquad = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s,t_0,x_0))\,ds - \int_{t_0'}^{t} f(s,x(s,t_0',x_0))\,ds \right\| \\
&\quad \le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s,t_0,x_0)) - f(s,x(s,t_0',x_0))\|\ ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t_0'} \|f(s,x(s,t_0',x_0)\|\ ds \right| \\
&\qquad\qquad\qquad \le \left| \int_{t_0}^{t} k(s)\,\|x(s,t_0,x_0)-x(s,t_0',x_0)\| \right| + \left| \int_{t_0}^{t_0'} m(s)\,ds \right|,
\end{aligned}
$$

luego, usando de nuevo el lema de Gronwall 3.30,

$$
\begin{aligned}
\|x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0',x_0)\| &\le \left| \int_{t_0}^{t_0'} m(s)\,ds \right| \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} k(s)\,ds \right| \right) \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t_0'} m(s)\,ds \right| \exp\left(\int_{\mathbb{R}} k(s)\,ds \right). \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Como m es una función integrable (y por tanto la medida que define es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue), sabemos que hay una cierta función positiva $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{s\to 0} h(s) = 0$ de forma que para $t_0, t_0' \in \mathbb{R}$ se cumple que $\int_{t_0}^{t_0'} m(s)\,ds \le h(|t_0 - t_0'|)$. Usando esto,

$$
\|x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0',x_0)\| \le h(|t_0-t_0'|)\exp\left(\int_{\mathbb{R}} k(s)\,ds \right). \qquad (24)
$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
&\|x(t,t_0,x_0)-x(t',t_0,x_0)\| \\
&\qquad \le \left| \int_{t}^{t'} \|f(s,x(s,t_0,x_0))\|\ ds \right| \le \left| \int_{t}^{t'} m(s)\,ds \right| \le h(|t-t'|). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Las estimaciones (22), (24), (25) prueban que x es continua en sus tres variables por separado; de hecho, como las cotas son independientes de los puntos particulares que escojamos, prueban que es uniformemente continua en $I \times I \times \mathbb{R}^N$. □

Lema 4.2. *Sea I un intervalo real y $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory globalmente. Sea $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, $t_1 \in I$ con $t_1 \neq t_0$, y supongamos que existe una única solución definida en $[t_0, t_1]$ del pvi*

$$
\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (26)
$$

Entonces cualquier solución general de (1) definida en $I \times I \times \mathbb{R}^N$ es continua en $[t_0, t_1] \times \{t_0\} \times \{x_0\}$.

Observación 4.3. En el enunciado anterior, $[t_0, t_1]$ denota el intervalo delimitado por t_0 y t_1, sin importar su orden. No se excluye el caso en que $t_1 < t_0$.

Demostración. Sea x una solución general de (1) definida en $I \times I \times \mathbb{R}^N$. Demostremos que es continua en un punto cualquiera (t, t_0, x_0), con $t \in [t_0, t_1]$. Sea (t^n, t_0^n, x_0^n) una sucesión de puntos en $I \times I \times \mathbb{R}^N$ que converge a (t, t_0, x_0). Entonces, si m es una cota de Carathéodory de f,

$$\begin{aligned}
&\|x(t^n, t_0^n, x_0^n) - x(t, t_0, x_0)\| \\
&\qquad \le \|x(t^n, t_0^n, x_0^n) - x(t, t_0^n, x_0^n)\| + \|x(t, t_0^n, x_0^n) - x(t, t_0, x_0)\| \\
&\qquad \le \left| \int_t^{t^n} m(s)\, ds \right| + \|x(t, t_0^n, x_0^n) - x(t, t_0, x_0)\|, \qquad (27)
\end{aligned}$$

así que es suficiente probar que $x(t, t_0^n, x_0^n) \to x(t, t_0, x_0)$ cuando $n \to \infty$. La sucesión de funciones $\{x(\cdot, t_0^n, x_0^n)\}$, vistas como funciones definidas en $[t_0, t_1]$, es una sucesión de soluciones de $x' = f(t, x)$ en las condiciones de la Proposición 3.8, luego una parcial suya converge uniformemente a una solución de (1) que en t_0 vale x_0 y que, por la hipótesis de unicidad, tiene que coincidir con $x(\cdot, t_0, x_0)$ en $[t_0, t_1]$. De hecho, por este razonamiento, cualquier parcial de la sucesión $\{x(\cdot, t_0^n, x_0^n)\}$ tiene una subparcial que converge uniformemente a $x(\cdot, t_0, x_0)$ en $[t_0, t_1]$, y por tanto toda la sucesión converge gracias a un argumento muy común (de lo contrario, habría una parcial a distancia mayor que un cierto $\epsilon > 0$ de $x(\cdot, t_0, x_0)$, y ninguna subparcial de ésta puede converger uniformemente a $x(\cdot, t_0, x_0)$, contradiciendo lo anterior). En particular, $x(t, t_0^n, x_0^n) \to x(t, t_0, x_0)$. □

La demostración de este lema no usa el resultado anterior. No sigue el método de intentar obtener un resultado más general aproximando la ecuación por otras ecuaciones más regulares, para las que conocemos el resultado que se quiere demostrar, porque en este caso resulta más complicado que una demostración directa. El problema es que las estimaciones (22) y (24) no se prestan al paso al límite, porque en ellas aparece explícitamente la constante de Lipschitz de f. Sin embargo, pueden conseguirse resultados interesantes mejorando esta estimación de forma que dependa de propiedades más débiles de f que la Lipschitzianidad local. Esto lo escribiré sólo si resulta útil en algún momento.

Lema 4.4. *Sea I un intervalo real, $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Carathéodory globalmente, y tal que la solución de* (1) *es única. Entonces la solución general de* (1) *(definida en $I \times I \times \mathbb{R}^N$) es continua (en todas sus variables).*

Este lema es una consecuencia directa del Lema 4.2.

La razón de no obtener directamente el resultado siguiente en lugar de hacer previamente una versión que en cierta forma es global (Lema 4.2) es que para demostrar dicha versión no hay que preocuparse del dominio de definición de las soluciones, que es siempre el mismo. Sin embargo, el siguiente teorema puede demostrarse exactamente igual que el Lema 4.2 obteniendo antes algún resultado que asegure que si cierta solución está definida en un cierto intervalo compacto, las soluciones cercanas están también definidas en ese intervalo. Esta última afirmación es también una consecuencia del Teorema que viene a continuación; en particular, del hecho del que el dominio natural de la solución general sea abierto.

Teorema 4.5 (Continuidad con respecto a condiciones iniciales)**.** *Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D y* (1) *tiene solución única, entonces la solución general de* (1) *es continua en su dominio natural de definición, y dicho dominio es abierto.*

Demostración. Sea (t, t_0, x_0) un punto del dominio de definición de la solución general de (1), y consideremos el compacto

$$A := \{(s, x(s, t_0, x_0)) \mid s \in [t_0, t]\},$$

contenido en D por definición de solución. Tomemos abiertos U, V tales que

$$A \subseteq U \subset\subset V \subset\subset D$$

(donde $X \subset\subset Y$ significa que $\bar{X}$ es compacto y $\bar{X} \subseteq Y$). Como en la demostración del Teorema 3.15, podemos cambiar f por una función $\tilde{f}$ definida en $I \times \mathbb{R}^N$ de forma que $\tilde{f}$ coincide con f en $\bar{U}$, $\tilde{f} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^{N+1} \backslash V$ y que cumple las condiciones de Carathéodory globalmente en $I \times \mathbb{R}^N$. Consideremos una solución general $\tilde{x}$ del problema $x' = \tilde{f}(t, x)$. Por el Lema 4.2, dicha solución general (definida en $I \times I \times \mathbb{R}^N$ es continua en $[t_0, t] \times \{t_0\} \times \{x_0\}$, luego podemos encontrar un entorno abierto W de $[t_0, t] \times \{t_0\} \times \{x_0\}$ tal que $(s, \tilde{x}(s, t_1, x_1)) \subseteq U$ para $(s, t_1, x_1) \in W$. Como $f \equiv \tilde{f}$ en U, $\tilde{x}$ es una solución general de $x' = f(t, x)$ en W. De hecho es *la* solución general en W, puesto que la solución de esta ecuación es única por hipótesis, y es continua en (t, t_0, x_0), como queríamos demostrar.

Esto prueba además que la solución general x está al menos definida en W, y en particular en un entorno de (t, t_0, x_0). Esto implica que el dominio de definición de la solución general de $x' = f(t, x)$ es abierto. □

4.3. Continuidad con respecto a condiciones iniciales y parámetros

Como se explica en la sección 4.1, los resultados anteriores se aplican fácilmente al caso en que f depende también de un cierto parámetro λ.

Teorema 4.6 (Continuidad con respecto a condiciones iniciales y parámetros)**.** *Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D y la ecuación $x' = f(t, x, \lambda)$ tiene solución única para cualquier valor del parámetro λ, entonces la solución general de* (3) *es continua en su dominio natural de definición, y dicho dominio es abierto.*

Demostración. Este resultado no es más que la aplicación del Teorema 4.5 a la ecuación (20). □

Observación 4.7. Obsérvese que si hubiésemos demostrado continuidad respecto a x_0, t para la ecuación (21) y extendido el resultado directamente con la segunda reducción de la sección 4.1 para obtener continuidad con respecto a t_0 hubiésemos obtenido una condición más fuerte sobre f que la que aparece en el teorema anterior: hubiéramos necesitado que f fuera también continua en t.

4.4. Derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales

Las condiciones que se imponen a la ecuación para deducir que su solución general es derivable con respecto al valor inicial x_0 suelen ser, esencialmente, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ cumpla las mismas condiciones que cumplía f en el teorema sobre continuidad con respecto a parámetros. Por ejemplo, en [5], desde un punto de vista clásico, se exige que f sea de clase $\mathcal{C}^1$ respecto de x. En este trabajo y en [3], que comparten la misma teoría de existencia, se pide que $\frac{\partial f}{\partial x}$ cumpla también las condiciones de Carathéodory. La razón formal para esto es que puede probarse que la derivada de la solución general x con respecto al valor inicial x_0 cumple una ecuación en la que aparecen las derivadas parciales de f con respecto a x. De esta forma, es de esperar que $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ exista y sea continua si esta última ecuación está en las condiciones del teorema de continuidad. La demostración usual de este resultado ([5], [3]) consiste en probar que el cociente incremental de la derivada de x con respecto a las condiciones iniciales cumple otra ecuación diferencial, y que ésta pasa bien al límite. Aquí se presenta una demostración distinta, que pasa por probar un resultado sencillo en condiciones más débiles para extenderlo luego al caso usual. Frente a la otra, ésta tiene el inconveniente de ser menos elemental y contener ciertos detalles técnicos que la oscurecen. Por otra parte, es interesante porque da una justificación precisa del argumento formal mencionado antes, y tal vez porque el primer resultado, más débil, se presta a generalizaciones que podrían resultar útiles en otro contexto.

La derivabilidad con respecto al tiempo inicial t_0 requiere condiciones ligeramente más fuertes que las necesarias para probar regularidad con respecto a x_0; sin embargo, se puede seguir el mismo método de demostración en los resultados relacionados con esto.

En lo que sigue, $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ denota la matriz de derivadas parciales de las componentes de f con respecto a las componentes de x_0.

Teorema 4.8. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D y es localmente Lipschitz con constante integrable con respecto a la variable x, entonces la solución general de $x' = f(t, x)$ es localmente Lipschitz con respecto a la condición inicial x_0, y es localmente absolutamente continua con respecto al tiempo inicial t_0.*

Si f es globalmente Lipschitz con constante integrable con respecto a la variable x, entonces la solución general es globalmente Lipschitz con respecto a la condición *inicial x_0.*

En cualquiera de las condiciones anteriores, cada componente de la solución general es en particular localmente absolutamente continua con respecto a cada componente de x_0 y t_0 y se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) = I + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,t_0,x_0))\frac{\partial x}{\partial x_0}(s,t_0,x_0)\,ds \tag{28}$$

para todo $t, t_0 \in \mathbb{R}$ y casi todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que x está definida en (t,t_0,x_0).

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t,t_0,x_0) = -f(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,t_0,x_0))\frac{\partial x}{\partial t_0}(s,t_0,x_0)\,ds \tag{29}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y casi todo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que x está definida en (t,t_0,x_0).

Lema 4.9. *Sea $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable positiva, I un intervalo real no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función tal que*

$$|f(x) - f(y)| \le \int_x^y m(t)\,dt \qquad \forall\, x, y \in I.$$

Entonces, f es una función absolutamente continua en I y además $f'(x) \le m(x)$ para casi todo $x \in I$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $\delta > 0$ tal que

$$\int_E m \le \epsilon \qquad \forall\, E \subseteq \mathbb{R} \text{ medible tal que } |E| \le \delta.$$

Entonces, si $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n$ son un conjunto finito de puntos de I tales que

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \le \delta,$$

tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{y_i} m(t)\,dt = \int_{\cup_i [x_i,y_i]} m \le \epsilon.$$

La cota de la derivada de f se cumple porque para cualquier punto $x \in I$ donde tanto f como cualquier integral indefinida de m son derivables, y para $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{|h|}\,|f(x) - f(x+h)| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} m(t)\,dt\right|,$$

y pasando al límite cuando $h \to 0$ tenemos que $f'(x) \le m(x)$. □

Lema 4.10. *Si C es un compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, entonces el conjunto*

$$K_C := \bigcup_{(s,t,x) \in C} [s,t] \times \{t\} \times \{x\}$$

es un compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Demostración. Dicho conjunto es la imagen de $[0,1] \times C$ por la siguiente aplicación continua:

$$\begin{aligned} [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ (\lambda, s, t, x) &\mapsto (\lambda s + (1-\lambda)t, t, x). \end{aligned}$$

□

Demostración del teorema. El Teorema 4.5 y el hecho de que en estas condiciones la solución es única garantizan que la solución general x existe y es continua. Sea (t, t_0, x_0) un punto cualquiera dentro del dominio de definición E de x (que es abierto). Sea C cualquier entorno compacto de ese punto contenido en E, y consideremos K_C el compacto del lema anterior correspondiente a C. Dicho compacto K_C está también contenido en E. La función $(s, t_1, x_1) \mapsto (s, x(s, t_1, x_1))$ es continua, luego la imagen por ella de K_C es un también compacto, al que llamamos K. Si k es una constante de Lipschitz integrable para f en K, se cumple la estimación (22) (ya que puede repetirse el argumento dado allí); para todo $(s, t_1, x_1), (s, t_1, x_1') \in C$,

$$\|x(s,t_1,x_1) - x(s,t_1,x_1')\| \leq \|x_1 - x_1'\| \exp\left(\left|\int_{t_1}^{s} k(s)\,ds\right|\right) \leq K\,\|x_1 - x_1'\|. \quad (30)$$

Esto prueba que x es localmente Lipschitz con respecto a x_0.

En el caso de que f sea globalmente Lipschitz con constante integrable, el razonamiento anterior puede hacerse con $C = D$, y se obtiene que x es globalmente Lipschitz con respecto a x_0

Para la continuidad absoluta con respecto a t_0 puede hacerse algo parecido: con la misma cota k en K y con m una cota de Carathéodory de f en K puede repetirse la estimación (23) para obtener que si $(s, t_1, x_1), (s, t_1', x_1) \in C$,

$$\|x(s,t_1,x_0) - x(s,t_1',x_1)\| \leq \left|\int_{t_1}^{t_1'} m(s)\,ds\right| \exp\left(\int_{\mathbb{R}} k(s)\,ds\right). \quad (31)$$

Con el lema 4.9, esto prueba que x es localmente absolutamente continua con respecto a t_0.

Demostremos que se cumple la ecuación (28). Se trata de justificar con rigor que la expresión que se obtiene al derivar formalmente es correcta. Fijemos $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Podemos considerar la función x, fijadas sus dos primeras variables, como definida en el conjunto abierto $E_{t,t_0} := \left\{x_0 \in \mathbb{R}^N \mid (t, t_0, x_0) \in E\right\}$ (posiblemente vacío). Como esta función es localmente Lipschitz con respecto a x_0, sus derivadas parciales existen en casi todo punto (ver Lema 5.7; es suficiente aplicarlo localmente). Como x cumple la ecuación integral usual, podemos escribir

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) = I + \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0))\, ds \qquad \forall\, t, t_0 \in \mathbb{R}, \qquad \text{p.c.t. } x_0 \in E_{t,t_0}.$$

La función $f(s, x(s, t_0, x_0))$, como función de s, x_0, está definida al menos en $[t, t_0] \times E_{t,t_0}$. Restringida a $[t, t_0] \times U$, con $U \subseteq E_{t,t_0}$ un abierto acotado cualquiera con cierre contenido en E_{t,t_0}, se comprueba fácilmente que está en las hipótesis del Teorema 5.5 (para ser precisos es necesario aplicar el teorema para calcular cada parcial, fijando el resto de variables): la cota sobre la derivada que aparece en las hipótesis se tiene gracias a que la función $f(s, x(s, t_0, x_0))$ es Lipschitz con respecto a x_0 en $[t, t_0] \times \bar{U}$. Por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) = I + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x_0} f(s, x(s, t_0, x_0))\, ds \qquad \forall\, t, t_0 \in \mathbb{R}, \qquad \text{p.c.t. } x_0 \in E_{t,t_0}.$$

El Teorema 5.4, aplicado para derivar con respecto a cada componente de x_0 una vez fijados s, t_0, prueba que

$$\frac{\partial}{\partial x_0} f(s, x(s, t_0, x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0)) \frac{\partial x}{\partial x_0}(s, t_0, x_0)$$
$$\forall\, t, t_0 \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, s \in [t, t_0], \qquad \text{p.c.t. } x_0 \in E_{t,t_0}.$$

En particular, los dos miembros coinciden para casi todo $(s, t_0, x_0) \in E$ y podemos sustituir uno por otro bajo la integral para obtener que

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) = I + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0)) \frac{\partial x}{\partial x_0}(s, t_0, x_0)\, ds$$
$$\forall\, t, t_0 \in \mathbb{R}, \qquad \text{p.c.t. } x_0 \in E_{t,t_0},$$

que es lo que aparecía en el enunciado.

De forma análoga puede justificarse la derivación con respecto a t_0, usando esta vez el teorema 5.6 y obteniendo la cota uniforme de la derivada que justifica su aplicación de la estimación (31) y el lema 4.9. Con esto se obtiene la otra ecuación del enunciado. □

Esto implica, como precisaremos ahora, que $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ es la solución general de una ecuación dependiente de parámetros (t_0 y x_0). La condición inicial que cumple es siempre $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0, t_0, x_0) = I$. Podemos aplicar entonces el Teorema 4.6 para asegurar que su solución general es única (luego es necesariamente $\frac{\partial x}{\partial x_0}$) y es de hecho continua. Ésta es la idea del siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D y $\frac{\partial f}{\partial x}$ también las satisface, entonces la solución general de $x' = f(t,x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a la variable x_0 en su dominio natural de definición (que es abierto).*

Además, para cada $(t_0, x_0) \in D$, $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ es solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t, t_0, x_0))y \\ y(t_0) = I \end{cases} \tag{32}$$

Lema 4.12. *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$ un abierto* convexo, *$f : D \to \mathbb{R}^N$. Supongamos que todas las parciales de f con respecto a x existen en todo punto de D.*

Entonces, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ cumple las condiciones de Carathéodory globalmente, f es Lipschitz con constante integrable con respecto a x.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ cumple las condiciones de Carathéodory, f es localmente Lipschitz con constante integrable con respecto a x.

Demostración. Basta con que cada componente de f lo cumpla. Podemos suponer que $f : D \to \mathbb{R}$ (es decir, basta con el caso $N = 1$).

Para cada $(t,x), (t,y) \in D$, la función

$$\begin{aligned} &[0,1] \to [0,1] \\ &s \mapsto f(t, sx + (1-s)y) \end{aligned}$$

está bien definida porque D es convexo, y es derivable con derivada continua. Luego

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, sx + (1-s)y)\, ds \right| \\ \leq \int_0^1 \left| \frac{d}{ds} f(t, sx+(1-s)y) \right| ds &= \int_0^1 |\langle \nabla_x f(t, sx + (1-s)y), x - y \rangle|\, ds \\ &\leq \int_0^1 N \left\| \nabla_x f(t, sx + (1-s)y) \right\|_\infty \|x-y\|_\infty\, ds \\ &\leq N \|x-y\|_\infty \int_0^1 m(t)\, ds = N m(t) \|x-y\|_\infty , \end{aligned}$$

donde m es la cota integrable obtenida de las condiciones de Carathéodory sobre $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Para demostrar el resultado local basta aplicar lo anterior en cualquier abierto convexo y relativamente compacto de D. □

Observación 4.13. En el Lema 4.12, la condición de que D sea convexo puede sustituirse por la de que para cada t, $\{x \mid (t,x) \in D\}$ sea convexo.

Demostración del Teorema. El lema anterior implica que estamos en las condiciones del Teorema 4.8. La relación (28) nos permite "extender" $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ como sigue: la conclusión del Teorema 4.11 implica que

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) = I + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s,t_0,x_0)) \frac{\partial x}{\partial x_0}(s,t_0,x_0)\, ds$$
$$\forall\, t_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.c.t. } x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.c.t. } t \in I(t_0,x_0),$$

donde $I(t_0,x_0)$ es el intervalo maximal de definición de la solución de $x' = f(t,x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$ (posiblemente vacío). Podemos extender lo anterior a todo t. Definamos

$$\phi(t,t_0,x_0) := I + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} f(s, x(s,t_0,x_0)) \frac{\partial x}{\partial x_0}(s,t_0,x_0)\, ds$$
$$\forall\, t_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.c.t. } x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, t \in I(t_0,x_0).$$

Fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$, y $x_0 \in \mathbb{R}^N$ para el que ϕ esté definida. Con estos valores fijos, la función ϕ coincide con $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ para casi todo t, luego

$$\phi(t,t_0,x_0) = I + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s,t_0,x_0)) \phi(s,t_0,x_0)\, ds \quad \forall\, t \in I(t_0,x_0).$$

Por unicidad de solución, si la matriz $y(t,t_1,x_1,t_0,x_0)$ es la solución general de la ecuación

$$\begin{cases} y' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,t_0,x_0))\, y \\ y(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{33}$$

(que es una ecuación dependiente de los parámetros t_0, x_0) ocurre que

$$\phi(t,t_0,x_0) = y(t,t_0,I,t_0,x_0) \quad \forall\, t \in I(t_0,x_0).$$

La solución general y es continua gracias al Teorema 4.6, luego ϕ lo es (en todas las variables), y de hecho la expresión anterior nos permite extenderla continuamente a todo E. Para cualquier t_0 fijo, sabemos que $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ existe y coincide con ϕ en casi todo x_0, t. Por el Lema 5.7, x es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a x_0 en E, y su matriz de derivadas parciales es ϕ. □

Las condiciones para que las soluciones sean derivables también respecto del tiempo inicial t_0 tienen que ser más fuertes que las que aseguran derivabilidad con respecto a x_0, como muestra el siguiente ejemplo, tomado de [3]. La solución general de $x' = f(t,x)$ con

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

es

$$x(s,t,x) = \begin{cases} x+s-t & \text{si } t,s>0 \\ x+s & \text{si } s \geq 0, t<0 \\ x-t & \text{si } t \geq 0, s<0 \\ x & \text{si } t,s<0 \end{cases}$$

que es derivable con respecto a x, pero no con respecto a t o s.

Teorema 4.14. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ es continua en D y $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y satisface las condiciones de Carathéodory en D, entonces la solución general de $x' = f(t,x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a todas sus variables en su dominio natural de definición (que es abierto).*

Además, para cada $(t_0,x_0) \in D$, $\frac{\partial x}{\partial t_0}$ es solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t,t_0,x_0))y \\ y(t_0) = f(t_0,x_0) \end{cases} \tag{34}$$

de lo cual se deduce directamente, teniendo en cuenta el teorema 4.11 y la unicidad de solución de este sistema, que

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t,t_0,x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) f(t_0,x_0)$$

Demostración. Se trata de repetir la prueba del teorema 4.11, con la diferencia de que esta vez necesitamos la hipótesis adicional de que f sea continua para obtener la continuidad necesaria durante el razonamiento. El punto donde es preciso usar esto es donde se deduce que si la matriz $y(t,t_1,x_1,t_0,x_0)$ es la solución general de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,t_0,x_0))\, y \\ y(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{35}$$

entonces ocurre que

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t,t_0,x_0) = y(t,t_0,-f(t_0,x_0),t_0,x_0) \quad \forall\, t \in I(t_0,x_0),$$

donde se ve que es necesaria la continuidad de f si queremos obtener la de x.

Omito los detalles de la demostración porque es muy similar a la anterior. □

4.5. Derivabilidad con respecto al valor inicial x_0 y parámetros

En los resultados siguientes falta incluir la ecuación que cumplen las derivadas de la solución con respecto a parámetros y condiciones iniciales. Se obtienen también directamente a partir del Teorema 4.11.

Teorema 4.15. *Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Carathéodory en D y $\frac{\partial f}{\partial x_0, \lambda}$ también las satisface, entonces la solución general de $x' = f(t, x, \lambda)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a las variables x_0, λ en su dominio natural de definición (que es abierto).*

Además, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ es solución de la ecuación

$$\begin{cases} y' = \frac{\partial f}{\partial x} y + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Demostración. Se obtiene con la primera reducción mencionada en la sección 4.1, aplicando el Teorema 4.11 a la ecuación (20). □

4.6. Derivabilidad con respecto a condiciones iniciales y parámetros

Teorema 4.16. *Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ es continua en D y $\frac{\partial f}{\partial x_0, \lambda}$ existe y satisface las condiciones de Carathéodory en D, entonces la solución general de $x' = f(t, x, \lambda)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a todas sus variables en su dominio natural de definición (que es abierto).*

Demostración. Se usa de nuevo la primera reducción de la sección 4.1 para eliminar los parámetros, y entonces estamos en las condiciones del teorema 4.14. □

4.7. Derivadas sucesivas con respecto a las condiciones iniciales

Los resultados de diferenciabilidad se obtienen al aplicar lo anterior a la derivada con respecto a las condiciones iniciales, que es también solución de una cierta ecuación diferencial, de forma que pueden aplicarse los resultados de secciones anteriores recursivamente. Falta completar esta parte.

5. Apéndice

Este apéndice contiene algunos de los resultados que se usan en el desarrollo de este trabajo, pero que están de alguna forma alejados de su contenido.

5.1. Teorema de Ascoli-Arzelà

Teorema 5.1 (Ascoli-Arzelà)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un compacto, $f_n : K \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua. Entonces hay una parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en K.*

Teorema 5.2 (Ascoli-Arzelà, segunda versión)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto cualquiera, $f_n : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada en compactos y equicontinua en compactos. Entonces hay una parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en compactos de K.*

Esta segunda versión se obtiene de la primera recubriendo A por una sucesión de compactos crecientes y aplicando el resultado sucesivamente en cada uno de los compactos.

5.2. Integración de funciones vectoriales

Esta sección contiene los detalles de la extensión de la integral de Lebesgue a funciones que toman valores en un espacio vectorial de dimensión finita. Esto no es estrictamente necesario en el texto: se podría evitar fácilmente razonando en los lugares apropiados con cada una de las componentes de la función. Sin embargo, esto me parece más artificial que usar la extensión directa de los resultados usuales para funciones reales, que además no presenta mayores dificultades en el caso de dimensión finita.

Para un desarrollo completo de la teoría de integración de funciones con valores en cualquier espacio de Banach puede verse, por ejemplo, la primera parte del tratado de Dunford y Schwartz sobre operadores lineales [6].

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es una función (cuyas componentes denotamos por $f = (f_1, \dots, f_N)$), diremos que f es medible si sus componentes son medibles; diremos que es integrable si sus componentes son integrables. Si f es integrable, se define su integral como el vector

$$\int f := (\int f_1, \dots, \int f_N).$$

(Omitiré $d\mu$ en la notación, ya que las integrales serán siempre con respecto a esta medida).

El que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sea medible puede caracterizarse también por el hecho de que

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \quad \forall\, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Veamos esto. En el caso particular en que $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_N$ con $E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tenemos

$$f^{-1}(E) = f_1^{-1}(E_1) \cap \cdots \cap f_N^{-1}(E_N),$$

un conjunto medible. Entonces, si f es medible, como $\{E \subseteq \mathbb{R}^N \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una $\sigma-$álgebra que debe contener al menos a los rectángulos, debe contener a la $\sigma-$álgebra de Borel. Por otra parte, si se cumple esto puede verse que cada componente de f es medible eligiendo conjuntos E de la forma

$$E = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times E_i \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Las propiedades usuales de la integral se mantienen para esta integral vectorial: linealidad, versiones adecuadas de los teoremas de la convergencia monótona y dominada y el análogo al teorema real que dice que $\left|\int f\right| \leq \int |f|$. Probaremos este último resultado:

Proposición 5.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\|\cdot\|$ una norma cualquiera en $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Entonces,*

$$\left\|\int f\right\| \leq \int \|f\|$$

Demostración. Veamos primero que es cierto para funciones simples: si $s_1, \ldots, s_N$ son funciones simples en Ω siempre podemos tomar conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_m$ contenidos en Ω de forma que

$$s_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \chi_{A_j}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

donde χ_{A_j} representa la función característica del conjunto A_j, y α_{ij} son ciertos valores reales. Si llamamos $s := (s_1, \ldots, s_N)$,

$$\begin{aligned} \left\|\int s\right\| = \left\|\left(\int s_i\right)_i\right\| = \left\|\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \mu(A_j)\right)_i\right\| \\ = \left\|\sum_{j=1}^{m} \mu(A_j)(\alpha_{ij})_i\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \left\|(\alpha_{ij})_i\right\|. \end{aligned}$$

Por otra parte, como s es constante en cada A_j,

$$\int \|s\| = \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} \|s\| = \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} \|(\alpha_{ij})_i\| = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \left\|(\alpha_{ij})_i\right\|,$$

que es lo mismo que acabamos de obtener.

La demostración puede hacerse para cualquier f integrable por medio de un argumento usual de aproximación: si tomamos una sucesión de funciones simples vectoriales

$$s^n = (s_1^n, \ldots, s_N^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_i - s_i^n| = 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, N,$$

entonces en particular $\int s^n \to \int f$ cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$\left\|\int s^n\right\| \to \left\|\int f\right\| \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Además, $\int \|s^n\| \to \int \|f\|$, ya que, llamando $e_1, \dots, e_N$ a los vectores de la base usual de $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\left| \int \|s^n\| - \int \|f\| \right| &= \left| \int (\|s^n\| - \|f\|) \right| \leq \int |\|s^n\| - \|f\|| \\ &\leq \int \|s^n - f\| = \int \left\| \sum_{i=1}^{N} (s_i^N - f_i) e_i \right\| \leq \int \sum_{i=1}^{N} \left| s_i^N - f_i \right| \|e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{N} \|e_i\| \int \left| s_i^N - f_i \right| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.\end{aligned}$$

Como sabemos que para las funciones simples,

$$\left\| \int s^n \right\| \leq \int \|s^n\|$$

podemos terminar la prueba pasando al límite cuando $n \to \infty$ en esta igualdad. □

Otra propiedad común es que una función continua compuesta con una medible es medible. Esto sigue siendo cierto también: si $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es medible en el sentido anterior y $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\phi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible en el sentido usual. La demostración de esto es evidente usando la caracterización de medibilidad dada al principio.

5.3. Regla de la cadena y derivación bajo la integral

La siguiente generalización de la regla de la cadena es una extensión natural de la usual que permite, por ejemplo, derivar una composición de funciones absolutamente continuas bajo ciertas condiciones. Su demostración puede encontrarse en [4], Theorem 6.3.15.

Teorema 5.4 (Regla de la cadena)**.** *Sean I, J intervalos reales no triviales, $\phi : I \to J$, $F : J \to \mathbb{R}$. Supongamos que ϕ, F y $F \circ \phi$ son derivables en casi todo punto de su dominio, y que F lleva subconjuntos de J de medida nula en subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida nula. Entonces,*

$$(F \circ \phi)'(x) = (f \circ \phi)(x) \phi'(x) \quad \textit{p.c.t. } x \in I,$$

donde $f : J \to \mathbb{R}$ es cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$ para casi todo $x \in J$.

Obsérvese que las condiciones sobre F (que sea derivable en casi todo punto y lleve conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula) se cumplen en particular si F es absolutamente continua (ver [4], Proposition 6.1.9.)

El siguiente resultado sobre derivación bajo la integral es útil para la integral de Lebesgue. Aparece, junto con una demostración, en unos apuntes sobre el tema disponibles en `http://www.mat.uab.cat/ canizo/tex`.

Teorema 5.5 (Derivación bajo la integral)**.** *Sea J un intervalo real (en el que usaremos siempre la medida usual de Lebesgue) y $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $f : \Omega \times J \to \mathbb{R}$ tal que*

- *$f(x, \cdot)$ es absolutamente continua en J para casi todo $x \in \Omega$*
- *$f(\cdot, \lambda)$ es medible en Ω para casi todo $\lambda \in J$, y es integrable para al menos un cierto $\lambda_0 \in J$.*

Estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda)$ está definida en casi todo $(x, \lambda) \in \Omega \times J$. Supongamos que existe una función m, integrable en Ω, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \leq m(x) \quad \forall\, (x, \lambda) \in J \times \Omega \text{ donde } \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \text{ esté definida.} \tag{36}$$

Entonces

- *$f(\cdot, \lambda)$ es integrable para todo $\lambda \in J$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es integrable en $\Omega \times \tilde{J}$ para cualquier $\tilde{J} \subseteq J$ compacto (en particular, es integrable en x para casi todo λ),*
- *$\int_\Omega f(x, \lambda)\, dx$ es absolutamente continua en J*

y se cumple

$$\frac{d}{d\lambda} \int_\Omega f(x, \lambda)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, dx \qquad \text{p.c.t. } \lambda \in J.$$

La siguiente versión de la regla de Leibniz puede encontrarse también en la página mencionada antes:

Teorema 5.6 (Regla de derivación de Leibniz)**.** *Sea J un intervalo real no trivial. Sea $f : J \times J \to \mathbb{R}$ una función tal que*

- *$f(\cdot, \lambda)$ es medible en J para casi todo $\lambda \in J$, y es integrable para al menos un cierto $\lambda_0 \in J$.*
- *$f(x, \cdot)$ es absolutamente continua en J para casi todo $x \in J$.*

Estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda)$ está definida en casi todo $(x, \lambda) \in J \times J$. Supongamos que existe una función m, integrable en J, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \leq m(x) \quad \forall\, (x, \lambda) \in J \times J \text{ donde } \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \text{ esté definida.} \tag{37}$$

Sea $t_0 \in J$. Entonces,

- *$f(\cdot, \lambda)$ es integrable para todo $\lambda \in J$,*

- $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ *es integrable en* $J \times \tilde{J}$ *para cualquier* $\tilde{J} \subseteq J$ *compacto (en particular, es integrable en* x *para casi todo* λ*),*

- $\int_{t_0}^{\lambda} f(x,\lambda)\,dx$ *es absolutamente continua en* J*,*

y se cumple la regla de derivación bajo la integral,

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{\lambda} f(x,\lambda)\,dx = f(\lambda,\lambda) + \int_{t_0}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx \quad \text{p.c.t. } \lambda \in J. \tag{38}$$

5.4. Algunos resultados técnicos

Lema 5.7. *Sea* $D \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto,* $f : D \to \mathbb{R}^M$ *una función continua. Supongamos que para casi todo* $(x_1, \ldots, x_{N-1})$*,* f *es absolutamente continua con respecto a* x_N*. En particular, la derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial x_N}$ *existe en casi todo punto de* D*. Supongamos también que* $\frac{\partial f}{\partial x_N}$ *coincide en casi todo punto con una cierta función* ϕ *continua en* D*.*

Entonces $\frac{\partial f}{\partial x_N}$ *existe en todo punto de* D *y es igual a* ϕ*.*

Observación 5.8. Desde luego, el mismo teorema es cierto para cualquier derivada parcial, ya que la parcial con respecto a x_N no tiene nada de especial. Se usa únicamente por simplificar el enunciado.

Demostración. Basta considerar el caso en que $M = 1$ (cada afirmación se deduce de la afirmación correspondiente para cada componente de f). El caso $N = 1$ se demuestra simplificando ligeramente el caso $N > 1$, así que sólo lo probaremos para este último. Además, basta demostrar el resultado en un conjunto de la forma $U \times I$, con $U \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ un abierto y $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto (el resultado general se deduce entonces aplicándolo a cada subconjunto de D de la forma anterior). Fijemos $a \in I$. Las hipótesis prueban, gracias al teorema fundamental del cálculo, que para casi todo $(x_1, \ldots, x_{N-1}) \in U$ y casi todo $x_N \in I$,

$$f(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) = f(x_1, \ldots, x_{N-1}, a) + \int_a^{x_N} \phi(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N).$$

Los dos miembros son continuos en $U \times I$, luego coinciden en $U \times I$. De nuevo por el teorema fundamental del cálculo (esta vez usando el enunciado usual para la integral de Riemann), la parcial de f con respecto a x_N existe en $U \times I$ y coincide con ϕ. $\square$

Observación 5.9. Otra forma de ver que el lema anterior es cierto es observar que cuando f es absolutamente continua con respecto a una de sus variables, su parcial en casi todo punto es su parcial en el sentido de las distribuciones, y es conocido que una función con parcial distribucional continua es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a esa variable. Por supuesto, esto no es más que una forma un tanto encubierta de expresar la demostración anterior.

6. Sobre este texto

Estos apuntes no están en una versión final y es probable que contengan bastantes errores. Es probable también que cambie el contenido más o menos frecuentemente. Puedes encontrar la última versión de este documento en

`http://www.mat.uab.cat/ canizo/tex/`

Para comentarios o sugerencias escribe al autor a `canizo@mat.uab.cat`. Son útiles, en particular, correcciones de errores o sugerencias sobre ampliaciones de los resultados.

Referencias

[1] Haïm Brézis, Análisis Funcional, Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.

[2] Jack K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, INC., 1980

[3] Antonio Jesús Ureña Alcázar, *Tesina*, Abril 2000.

[4] Inder K. Rana, *An Introduction to Measure Theory and Integration*, segunda edición, Graduate Texts in Mathematics v.45, Narosa Publishing House, 2002.

[5] Philip Hartman, *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley & Sons, Inc., 1964.

[6] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz, *Linear Operators*, John Wiley & Sons Inc., Nueva York, 1963

[7] Earl A. Coddington, Norman Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, 1955.

[8] Aleksei Fedorovich Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*, Kluwer Academic Publishers, 1988